



UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Département MIDO^(*)

MASTER MIDO

MENTION MMD^(**)

SPÉCIALITÉ ACTUARIAT

Année Universitaire : 2009-2010

Mémoire d'Actuariat présenté en **novembre 2010** devant l'Université Paris Dauphine et l'Institut des Actuaire

Par : **Louride SEKHRI**

Tuteur : *Jean-Marc Boyer*

Sujet : **Etude de l'impact du contrôle des risques sur les performances financières**

Entreprise d'accueil : FIXAGE

CONFIDENTIEL

JURY

Membres du Jury

Fonctions / Entreprise

(*) MIDO : Mathématiques, Informatique, Décision, Organisation

(**) MMD : Mathématiques, Modélisation, Décision

**« ETUDE DE L'IMPACT DU CONTROLE DES RISQUES SUR LES PERFORMANCES
FINANCIERES »[♦]**
Louride Sekhri[•]

ABSTRACT

An accurate quantitative definition of financial crisis requires an universal and robust scale for measuring market shocks. Following Zumbach et al. (2000) and Maillet and Michel (2003), we propose a new quantitative measure of financial disturbances, which captures the heterogeneity of investor horizons .from day traders to pension funds. The underlying idea is to determine from a multi-resolution analysis of market volatility, each scale corresponding to various investment horizons and related data frequencies. This new risk measure, called .Wavelet-heterogeneous Index of Market Shocks (WhIMS), is based on the combination of two methods: the Wavelet Packet Sub-band Decomposition and the constrained Independent Component Analysis (see Kopriva and Seršić, 2007 and Lu and Rajapakse, 2005). We apply this measure on the French Stock Market (high-frequency CAC40) to date and gauge the severity of financial crises. A state separation of financial disturbances is finally performed using a nonlinear classification.

The second chapter discusses the impact of risk control on the distribution of financial performance. Risk control and asset management are closely linked. Indeed, a risk control management with uncoordinated or poorly calibrated is a common cause of underperformance. The tracking error, standard deviation of over (or under) performance relative to benchmark is often used by societies to define a "risk budget". We propose a quantification of the impact of risk control on financial performance. For this, we consider an asset allocation strategy based on a tracking error constraint.

The last part deals with the problem of long-term management in the context of Solvency II. Traditionally an institutional investor managed with the long term horizon, which allowed him to be countercyclical with some effectiveness. By imposing procyclical risk constraints with short horizon, we condemn them to underperform in long term and to increase market volatility and systemic risk. We describe this phenomenon of cyclicity, and adopt a quantitative approach to this phenomenon. We compare three kind of management: a management saturating a SCRmarché constraint, a fixed allocation management and a dynamic allocation with a countercyclical allocation.

Keywords: financial crisis, wavelets, nonlinear classification, regime switching, *tracking-error*, procyclical, SCR, solvency II

[♦] We thank Mr. Michel Piermay who oversaw this memory. We here acknowledge Dorothée Bary, and Bertrand Maillet, for encouragements and a kind support when preparing this work.

[•] Diplôme d'Actuaire – Université Paris Dauphine. Email: louride.sekhri@gmail.fr

L'Université Paris Dauphine n'entend donner aucune approbation, ni improbation aux opinions émises dans ce mémoire ; elles doivent être considérées comme propres à leur auteur.

« ETUDE DE L'IMPACT DU CONTROLE DES RISQUES SUR LES PERFORMANCES
FINANCIERES »[♦]
Louride Sekhri[•]

Résumé

Les larges fluctuations de prix sur les marchés financiers sont de première importance non seulement pour les praticiens, mais aussi pour les décideurs publics et les autorités monétaires, en raison de leurs conséquences sur la stabilité macroéconomique et financière. La succession des événements de crises et leur caractère imprévisible mettent en évidence l'intérêt que pourrait avoir une mesure consensuelle de turbulence des marchés. En associant précision et pertinence dans la prédiction des crises, nous souhaitons constituer un puissant outil d'aide à la décision, ce qui représente un enjeu majeur pour les acteurs économiques et financiers.

L'objet du premier chapitre est d'introduire un nouvel indicateur le *Wavelet-heterogeneous Index of Markets (WHIMS)* et de lui associer une méthode innovante d'approximation et de classification liée aux réseaux de neurones. Le *WHIMS* est une mesure de risques permettant l'évaluation de l'intensité des crises financières et leurs ordonnancements selon une échelle analogue à celle de Richter. Prolongeant les études faites par Zumbach *et alii* (2000) et Maillet et Michel (2003, 2005), ayant respectivement construit le *Scale of Market Shocks (SMS)* et l'*Index of Market Shocks (IMS)*, cet indicateur introduit la dimension d'hétérogénéité des investisseurs – allant des *day traders* aux institutionnels.

Le second chapitre traite de l'impact du contrôle des risques sur la distribution des performances financières. Le contrôle des risques et la gestion financière sont étroitement liés. En effet, un contrôle de risque mal coordonné avec la gestion ou mal étalonné est une cause fréquente de sous-performance. La *tracking-error*, écart-type de la sur(ou sous) performance par rapport au benchmark est souvent utilisée par les sociétés de gestion pour définir un « budget risque ». Nous proposons une quantification de l'impact du *risk management* sur les performances financières. Pour cela, nous considérons une stratégie d'allocation d'actif basée sur une contrainte de *tracking error*.

La dernière partie pose le problème de la gestion à long terme dans le cadre de la directive Solvabilité II. Un investisseur institutionnel gérait traditionnellement à long terme, ce qui lui permettait d'être contracyclique avec une certaine efficacité. En lui imposant des contraintes de risque procycliques à horizon court, on le condamne à moins performer à long terme et on accroît la volatilité des marchés ainsi que le risque systémique. Nous décrivons ce phénomène de procyclicité, et adoptons une approche quantitative de ce phénomène. Nous comparons trois types de gestions : une gestion saturant une contrainte de $SCR_{\text{marché}}$, une gestion à allocation fixe et une gestion dynamique à allocation contracyclique.

Mots clefs : crises financières, analyse factorielle, transformée en ondelettes discrètes, réseaux de neurones, chaîne de Markov cachées, *tracking-error*, procyclicité, SCR

[♦] Je tiens à remercier Monsieur Michel Piermay qui a encadré ce mémoire, ainsi que Dorothée Bary, Bertrand Maillet, pour leur aide, leurs encouragements et leurs conseils.

[•] Diplôme d'Actuaire – Université Paris Dauphine. Email: louride.sekhri@gmail.fr

L'Université Paris Dauphine n'entend donner aucune approbation, ni improbation aux opinions émises dans ce mémoire ; elles doivent être considérées comme propres à leur auteur.

REMERCIEMENTS

La page de remerciements dans un rapport est la place privilégiée pour citer, à juste titre, l'ensemble des personnes qui m'ont permis de produire ce travail dans les meilleures conditions possibles. C'est donc avec beaucoup de sympathie que je souhaitais leur adresser, à chacun, tous mes remerciements pour l'agréable période de stage que j'ai passée.

Je remercie Monsieur Michel Piermay, directeur général de FIXAGE de m'avoir accueillie au sein de sa société.

Je souhaiterais, vivement remercier Dorothée Bary, mon maître de stage qui m'a encadré tout au long de ces six mois. Elle a su me guider, me conseiller et tirer le meilleur de moi-même. Je la remercie pour sa franchise, sa détermination et sa volonté de toujours me faire progresser

Je remercie François Uzan pour m'avoir accompagné le plus agréablement possible tout au long de mon stage. Je le remercie pour son esprit de camaraderie, son accueil et son aide qui m'a été précieuse.

J'aimerais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Bertrand Maillet pour ses nombreux conseils, son aide et son écoute.

Enfin, je remercie aussi toutes les autres personnes de Fixage pour leurs sympathie, leurs gentillesse et pour l'accueil qu'ils m'ont fait.

TABLE DES MATIERES

ABSTRACT.....	2
RESUME	3
REMERCIEMENTS.....	4
INTRODUCTION	8
PARTIE I : ETUDE EMPIRIQUE D'UNE NOUVELLE MESURE DE TURBULENCE SUR LES MARCHES FINANCIER	11
I. LES PREMIERES MESURES DE CARACTERISATION DES CRISES FINANCIERES ET LA CONSTRUCTION DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHÉ.....	12
1. LA VOLATILITE UNE MESURE DES CRISES SUR LES MARCHES FINANCIERS	12
2. LES ORIGINES DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHÉ (<i>WHIMS</i>).....	13
II. ETUDE DES TECHNIQUES STATISTIQUES PERMETTANT LA CONSTRUCTION DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHÉ (<i>WHIMS</i>).....	16
1. LA METHODE DES ONDETTES DISCRETES : UNE INTRODUCTION.....	16
2. L'ANALYSE EN COMPOSANTES INDEPENDANTES : UNE INTRODUCTION	19
3. REPARTITION DES VALEURS EXTREMES : ESTIMATION D'UNE DISTRIBUTION GENERALISEE DE PARETO A L'AIDE DE LA METHODE DES TL-MOMENTS.....	24
III. MODELISATION ET CARACTERISATION DES ETATS DE CRISE DANS LES MARCHES FINANCIERS	25
1. LES RESEAUX DE NEURONES ARTIFICIELS	25
2. UNE PRESENTATION DU PERCEPTRON MULTICOUCHE.....	26
3. L'APPRENTISSAGE PAR RETRO-PROPAGATION	28
4. LES CHAINES DE MARKOV CACHEES ASSOCIEES AUX RESEAUX DE NEURONES	29
IV. ETUDE EMPIRIQUE : UNE APPLICATION DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHÉ (<i>WHIMS</i>) AU CAC40.....	31
1. LES DONNEES.....	31
2. LE PHENOMENE D'HETEROGENEITE DES MARCHES FINANCIERS	33
3. APPLICATION DE LA METHODE DE DECOMPOSITION DES ONDETTES DISCRETES	35
4. APPLICATION DE L'ANALYSE EN COMPOSANTES INDEPENDANTES (<i>ACI</i>).....	37
PARTIE II : LE CRITERE DE TRACKING ERROR DANS LA GESTION ACTIVE	43
I. GESTION ACTIVE ET BENCHMARK	44
1. LA DEFINITION DU BENCHMARK.	44
2. LA GESTION ACTIVE.....	45
II. LA TRACKING ERROR : UN CRITERE DE RISQUE POUR LA GESTION DE FONDS	46
1. DEFINITION DE LA TRACKING ERROR.....	46
2. ESTIMATION DE LA TRACKING ERROR	46
III. MODELE DE SIMULATION DE LA STRATEGIE D'INVESTISSEMENT DU GERANT	47
1. EXPRESSION DE LA TRACKING ERROR	47

2. HYPOTHESE SUR LA STRATEGIE D'INVESTISSEMENT DU GERANT.....	47
IV. MODELISATION STOCHASTIQUE DE L'INDICE DE REFERENCE.....	49
1. LA METHODE DE MONTE CARLO	49
2. LA GENERATION DE MOUVEMENTS BROWNIENS.....	50
2.1. LE PRINCIPE.....	50
2.2. LA GENERATION DE NOMBRES ALEATOIRES.	50
V. LES PRINCIPAUX MODELES DE DIFFUSION DE L'INDICE DE REFERENCE	51
1. LE MODELE DE BLACK & SCHOLES	51
2. LE MODELE A ELASTICITE CONSTANTE DE LA VARIANCE (CEV)	53
2.1. PRESENTATION DU MODELE CEV.....	53
2.2. LE CALIBRAGE.....	54
3. LE MODELE A CHANGEMENT D'ETATS : « REGIMES SWITCHING »	55
3.1. PRESENTATION DU MODELE « REGIME SWITCHING »	55
3.2. LA MATRICE DE PASSAGE.....	56
4. INTRODUCTION D'UN PROCESSUS A SAUTS DANS LE MODELE « REGIME SWITCHING »	58
4.1. PRESENTATION DU MODELE « REGIME SWITCHING A SAUTS »	58
4.2. CALIBRAGE DU MODELE.....	59
VI. LES MESURES DE PERFORMANCES RELATIVES	60
1. LA NECESSITE DE MESURER LA PERFORMANCE	61
1.1. L'INTERET THEORIQUE.....	61
1.2. L'INTERET PRATIQUE.....	61
2. LE RATIO DE SHARPE	62
2.1. PRESENTATION DE LA MESURE.....	62
2.2. RESULTATS EMPIRIQUES ET INTERPRETATION.....	64
3. LE RATIO DE DOWD	65
3.1. PRESENTATION DU RATIO DE DOWD.....	65
3.2. RESULTATS EMPIRIQUES ET INTERPRETATION.....	67
4. LE RATIO D'INFORMATION	68
4.1. PRESENTATION DU RATIO D'INFORMATION.....	68
4.2. LIMITE DU RATIO D'INFORMATION.....	69
5. L'INDICE D'AFTALION ET PONCET (AP)	72
5.1. PRESENTATION DE L'INDICE D'AFTATION ET PONCET.....	72
5.2. RESULTATS EMPIRIQUES ET INTERPRETATION.....	73
VII. ETUDE DE SENSIBILITE	74
1. ETUDE DE LA SENSIBILITE AU MODELE DE DIFFUSION DE L'INDICE DE REFERENCE	74
2. ETUDE DE LA SENSIBILITE AU COMPORTEMENT DU GERANT.....	74
VIII. CONCLUSION	75
PARTIE III LE PERIMETRE D'APPLICATION ET LES LIMITES DE SOLVABILITE II.	77
I. LA DIRECTIVE SOLVABILITE II	78
1. LE CADRE CONCEPTUEL	78
2. LES PRINCIPAUX OBJECTIFS DE LA DIRECTIVE	78

3. DISPOSITIONS GÉNÉRALES CONCERNANT LE CAPITAL DE SOLVABILITÉ REQUIS.	80
II. LA MESURE DES RISQUES DANS SOLVABILITÉ II	80
1. FORMULE STANDARD	80
2. LE MODÈLE STANDARD PROPOSÉ PAR LE QIS 5	81
2.1. EFFET D'ABSORPTION PARTIELLE DES CHOCS FINANCIERS PAR LE PASSIF.	84
2.2. PRINCIPE DE L'APPROCHE PAR TRANSPARENCE.	84
2.3. LE CALCUL DE L'EXIGENCE DE CAPITAL CIBLE (SCRMARCHE.)	85
III. SOLVABILITÉ II : UNE NECESSITÉ PERFECTIBLE	89
1. LA NECESSITÉ D'UNE REFORME DU SYSTÈME DE SOLVABILITÉ ACTUEL	89
2. LES PROBLÈMES SOULEVÉS PAR SOLVABILITÉ II.....	90
2.1. LA VAR UNE MESURE DE RISQUE DÉFICIENTE.....	90
2.2. INADEQUATION DES PARAMÈTRES DE CALIBRATION.	93
2.4. PROCYCLICITÉ	95
VI. LE SCRMARCHE UN CRITÈRE DE GESTION DU RISQUE PROCYCLIQUE	96
1. HYPOTHÈSES ET CALCUL DU SCR_{MARCHE}	96
1.1. CALCUL DU SCR ACTION.	96
1.2. CALCUL DU SCR TAUX.	97
1.3. AGREGATION DES SCR.....	97
2. STRATÉGIE D'INVESTISSEMENT DU GERANT	98
3. MODÈLE DE SIMULATION DE L'ACTIF	99
3.1. MODÉLISATION DES ACTIONS.	99
3.2. MODÉLISATION DES TAUX NOMINAUX.	102
3.3. ÉVALUATION DE LA PERFORMANCE DES OBLIGATIONS.....	104
3.4. LIEN ENTRE LES ACTIFS.	105
4. RÉSULTATS EMPIRIQUES ET INTERPRÉTATION	106
V. CONCLUSION	110
CONCLUSION GÉNÉRALE	112
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	114
ANNEXE 1 : L'ALGORITHME DE RETRO-PROPAGATION	119
ANNEXE 2 : LES ALGORITHMES D'APPRENTISSAGE D'UNE CHAÎNE DE MARKOV CACHÉE	120
(OU HMM POUR HIDDEN MARKOV MODEL)	120
ANNEXE 3 : TABLEAUX RÉCAPITULATIFS DES STATISTIQUES DESCRIPTIVES DE LA DISTRIBUTION DES PERFORMANCES À HORIZON UN AN	123

Introduction

Les marchés financiers connaissent alternativement des périodes d'optimisme et de pessimisme, qui se traduisent par des phases de croissance et des crises. On peut citer la Grande Dépression des années 1930, le Crach d'octobre 1987 ou plus récemment la crise des *subprimes*. Ces crises systémiques, caractérisées par de fortes fluctuations de prix, une hausse de la volatilité et une forte corrélation des différents marchés sont aujourd'hui au cœur des préoccupations des investisseurs. Ces turbulences justifient l'importance d'estimer l'intensité des chocs sur les marchés financiers. La compréhension et la prévision de ces crises sont désormais des éléments indispensables pour les acteurs des marchés.

Les outils utilisés pour estimer le risque associé à une allocation d'actifs se basent sur des méthodes statistiques, et notamment sur l'étude des distributions des rendements des actifs. La plupart des modèles d'allocation d'actifs existants ne peuvent pas prévoir précisément de telles crises majeures. Au cours des années 1990 sont apparus des articles traitant des systèmes d'intelligence artificielle. Cette littérature a connu un véritable essor ces dernières années.

Dans le domaine financier, dès 1990, Hawley *et alii* appliquent ces méthodes pour traiter des problèmes aussi divers que la détection des entreprises en difficulté, la gestion de portefeuille, l'évaluation des introductions en bourse et la détection d'opportunités d'arbitrage. Aujourd'hui encore, les vastes possibilités offertes par ces techniques sont communément employées par la recherche académique en finance. Elles sont par exemple utilisées pour prévoir les prix d'actifs (*Cf.* Avouyi-Dovi et Caulet, 1995), pour discriminer différents actifs financiers (*Cf.* Maillet et Rousset, 2003 ; de Bodt *et alii*, 2004), ou encore pour corriger les variations saisonnières des séries temporelles (*Cf.* Ben Omrane et de Bodt, 2007). Pourtant, le caractère non-supervisé de ces modèles (et leur caractéristique dite de boîte noire) constitue une critique récurrente. Néanmoins, une utilisation circonspecte et des contrôles a posteriori (*Cf.* de Bodt *et alii*, 2002 et 2004) permettent de concevoir raisonnablement des modèles fondés sur ces techniques neuronales.

Afin de mieux présenter les différentes notions qui sont introduites dans ce mémoire, nous allons débiter par un rappel de plusieurs définitions fondamentales. En premier lieu, il est nécessaire de bien définir le concept de crise financière. Plusieurs définitions ont été proposées (*Cf.* Kindleberger, 1978 ; Minsky, 1972 ; Eichengreen et Portes, 1986 ; Mishkin, 1991) sans réussir à s'accorder sur une caractérisation unique. D'après Kindleberger (1978) et Minsky (1972), une crise financière est caractérisée par une chute brutale du prix des actifs financiers entraînant, en premier lieu, une « cascade » de faillite dans les secteurs financiers, puis dans les autres secteurs de l'économie avant d'impacter finalement le marché des changes. Dans cette étude, nous nous baserons sur cette définition pour construire un indicateur quantitatif de crises. Nous considérons qu'une crise financière est un état de marché affectant l'ensemble des opérateurs, des *day traders* aux institutionnels, et se caractérisant par une baisse du prix des actifs.

Ayant défini le concept de crise financière, nous nous proposons désormais d'introduire comme mesure de risque le « *Wavelet-heterogeneous Index of Market Shocks* » (*WhIMS*). Cet indicateur prolonge les travaux de Zumbach *et alii.* (2000) et Maillet et Michel (2003, 2005) qui ont respectivement proposé le *Scale of Market Shocks (SMS)* et l'*Index of Market Shocks (IMS)*, deux indicateurs fondés sur une analogie avec l'échelle de Richter. Cette mesure, utilisée en géophysique, détermine l'ampleur d'un tremblement de terre en analysant l'énergie dissipée. Dans notre étude, l'énergie dissipée correspondra à la volatilité du marché. Le *WhIMS* qui est une extension de l'*IMS* et du *SMS*, se différencie par la combinaison de deux méthodes : une méthode d'analyse en ondelettes, la *Wavelet Packet*, et une méthode d'analyse factorielle, la *Subband Decomposition constrained Independant Component Analysis*. Nous détaillerons la construction du *WhIMS* et ses caractéristiques dans la suite de cette étude.

Le premier chapitre est dédié à la caractérisation des crises financières. Plus précisément, nous nous focalisons sur l'étude d'une mesure de turbulence sur les marchés financiers. Dans un premier temps, nous définissons les fondements théoriques de l'étude et nous détaillons les différentes techniques statistiques nécessaires à la construction de notre indicateur de chocs boursiers. Par la suite, nous introduisons les réseaux de neurones en retraçant leurs origines et leur fonctionnement, puis en y associant des perceptrons multicouches caractérisés par un principe d'apprentissage. Enfin, nous conjugons les RNA à notre nouvel indicateur pour l'étude des séries financières. Enfin, nous terminons par un modèle associant les chaînes de Markov cachées (*Hidden Markow Chains - HMC*) aux RNA, permettant de déterminer les différents régimes d'une série et d'associer à chacun d'eux un perceptron, de manière à caractériser les états de crises.

Après une définition et une caractérisation formelle des régimes de crise. Nous nous intéressons dans le second chapitre à l'impact du contrôle des risques sur la distribution des performances futures. En effet, la gestion des risques a des conséquences non négligeables sur les performances financières. Le contrôle des risques peut reposer sur des méthodes qualitatives ou sur des mesures quantitatives du risque. Dans les deux cas, il présente des aspects procycliques.

Dans le cadre de la gestion active, nous souhaitons quantifier l'impact du contrôle des risques sur la distribution des performances d'un gérant. Pour cela, nous nous basons sur le critère de *tracking error*. Nous définissons le cadre de notre étude, à savoir la gestion active ainsi que les différentes notions qui s'y rapportent. Nous proposons différents modèles de simulation du *benchmark*, nous permettant de mesurer l'effet de l'épaississement des queues de distribution sur la gestion du risque et donc sur les performances qui en découlent. En effet, la stratégie d'investissement du gérant que nous définissons dépend directement du contrôle des risques. Nous nous appuyons par ailleurs sur les résultats obtenus au premier chapitre pour la caractérisation des régimes de crise. Nous concluons ce chapitre sur l'effet du contrôle des risques. Notre conclusion se base sur l'analyse de différentes mesures de performances préalablement définies.

Le troisième chapitre traite de la procyclicité des mesures de risques au sein de la directive Solvabilité II. Le nouveau système de solvabilité en Europe change totalement la vision de la politique financière en assurance. Sous Solvabilité II, l'assureur devra immobiliser un montant de capital dans ses fonds propres, servant à couvrir le risque de placement. Le niveau obligatoire du capital sera estimé via les modèles de *Value at Risk (VaR)* et dépendra du niveau du risque de portefeuille : plus le portefeuille est risqué, plus l'assureur devra posséder de capitaux. Cette méthode de couverture du risque de marché modifie les objectifs selon lesquels l'assureur guidera sa politique de placement : il devra prendre en compte un nouveau critère d'allocation d'actifs. Dès lors, il optimisera son portefeuille en incluant le montant du capital immobilisé dans ses fonds propres.

La construction du SCR, inspirée par les règles actuellement en vigueur aux Etats-Unis (RBC), pourrait avoir des conséquences négatives pour les investissements des assureurs. La gestion de portefeuille dans le cadre de Solvabilité II exigera donc une nouvelle contrainte - la *VaR*. La gestion du risque sous Solvabilité II repose sur la *VaR*. Nous nous interrogeons sur la légitimité de cet indicateur et expliquons en quoi la conception du risque sous Solvabilité II est en elle-même un facteur de risque supplémentaire et procyclique.

Nous introduisons le cadre conceptuelle de la directive Solvabilité II, ainsi que les différentes mesures de risques développées dans l'approche standard. Nous détaillons les points de perfectibilité de la directive, en insistant sur son caractère procyclique. Dans la dernière section de ce chapitre, nous mesurons la procyclicité due à l'utilisation du SCR marché dans la gestion financière d'une compagnie d'assurance. Pour cela, nous définissons une stratégie d'investissement basée sur le $SCR_{\text{marché}}$ et la comparons à d'autres types de gestion. Nous concluons notre étude sur l'analyse des performances annualisées liées à chacune des stratégies d'investissement.

PARTIE I :
ÉTUDE EMPIRIQUE D'UNE NOUVELLE MESURE DE TURBULENCE SUR
LES MARCHES FINANCIERS

I. LES PREMIERES MESURES DE CARACTERISATION DES CRISES FINANCIERES ET LA CONSTRUCTION DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHE

Au cours de cette première section, nous étudions les deux principaux indicateurs de crise qui ont précédé le *Wavelet-heterogeneous Index of Market Shocks (WhIMS)* en décrivant leur méthode de construction et les leurs limites sous-jacentes.

Ces limites serviront alors de transition afin de mettre en évidence les contributions apportées par le *WhIMS*.

1. LA VOLATILITE UNE MESURE DES CRISES SUR LES MARCHES FINANCIERS

En finance et en économétrie financière, l'analyse des variations du prix d'un actif et de son instabilité est fondamentale. La volatilité joue un rôle clé dans l'évaluation des produits dérivés, dans l'allocation des actifs ou dans la gestion du risque. Plus précisément, pour décrire le processus engendrant le prix efficient sur un marché d'actifs, il est nécessaire de prendre en compte la volatilité « locale » qui mesure le risque associé à une variation instantanée du prix de l'actif. Le problème est que la volatilité est une variable continue, aléatoire et non observable.

Dans le sillage de Merton (1980), compte tenu du caractère aléatoire de la volatilité, les chercheurs se sont intéressés non plus directement à la volatilité instantanée mais à ce que l'on désigne sous le nom de variance intégrée ou encore de variation quadratique et qui représente la somme (l'intégrale en raisonnant en temps continu) des carrés de la volatilité instantanée. La variance intégrée correspond ainsi par exemple à la variance d'un prix au cours d'une journée, obtenue grâce à des informations collectées à une fréquence intra-journalière (i.e. à haute fréquence, 5, 10 ou 30 minutes par exemple). Plusieurs approches ont été développées pour déterminer un estimateur faible et robuste de la variance intégrée.

Les approches paramétriques sont fondées sur l'utilisation de modèles décrivant la dynamique de la variance des rendements. Le modèle ARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity) proposé par Engle en 1982, qui consiste à estimer conjointement des équations du rendement et volatilité conditionnelle d'un actif et, surtout, l'une de ses généralisations (le modèle Exponential ARCH de Nelson, 1992) sont des candidats sérieux pour la mesure de la variance intégrée. Le modèle de Nelson a l'énorme avantage de permettre un passage relativement aisé du temps continu au temps discret; de ce fait, il peut être intégré dans le cadre analytique de modèles en temps continu en finance. Ces modèles connaissent depuis plusieurs années déjà, tout particulièrement dans les milieux académiques, un développement extraordinaire. Des papiers présentés au colloque sont fondés sur cette approche.

À l'opposé, la variance réalisée (ou encore variance notionnelle) relève d'une approche non paramétrique. La variance réalisée du prix d'un actif, à une date t (un jour par exemple) est la somme des carrés de ses rendements observés à un pas de temps donné :

$$RV_t = \sqrt{\sum_{j=1}^M r_{t,j}^2} \quad (1)$$

où RV_t est la volatilité réalisée et r_t le rendement à la date t du prix d'un actif déterminé de la façon suivante :

$$r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1}) \quad (2)$$

avec p_t le prix de l'actif à la date t .

Il s'agit d'un estimateur usuel de la variance intégrée, introduit par Merton en 1980 et généralisé dans plusieurs travaux récents (Andersen, Bollerslev, Diebold et Labys, 2001 et 2003 et Bandorff-Nielsen et Shephard, 2001, 2002a, 2002b, 2005 ou encore Comte et Renault, 2001). En théorie, plus le pas de temps est fin, plus la variance réalisée devrait se rapprocher d'un indicateur fiable ou convergent de la variance intégrée. Malheureusement, les prix d'actifs financiers, plus particulièrement à hautes fréquences, subissent une très large variété de frictions que l'on peut interpréter comme des imperfections du processus de transaction ou des effets dits de microstructure (différences entre les volumes de transaction, information contenue dans les variations de prix, composantes stratégiques des flux d'ordres, effets de contrôle des stocks, discrétisation des données, etc.). La présence des effets de microstructure fait que le prix efficient n'est pas observée. En fait, le prix observé est la somme du prix efficient non observé plus une variable aléatoire qui représente les effets de microstructure. De ce fait, l'estimateur usuel de variance réalisée est biaisé et non convergent. Il s'agit donc de trouver un estimateur convergent de la volatilité intégrée à partir des données entachées.

2. LES ORIGINES DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHÉ (*WHIMS*)

Depuis la fin des années 1990, de nombreuses recherches se sont portées vers la détermination d'une mesure de risque capable d'évaluer l'intensité des crises financières. La littérature à ce sujet se concentre principalement autour des travaux de Zumbach et *alii* (2000) et Maillet et Michel (2003, 2005). Nous cherchons ainsi à implémenter et appliquer au marché français des actions une mesure qui soit similaire au Scale of Market Shocks de Zumbach et *alii* (2000) et à l'Index of Market Shocks de Maillet et Michel (2003, 2005) et qui puisse surmonter les limites de ceux-ci.

2.1 L'ECHELLE DES CHOCS DE MARCHÉ DE ZUMBACH ET ALII (SCALE OF MARKET SHOCKS)

Le *Whims* trouve ses origines dans les premiers travaux de Zumbach et *alii* en 2000. Ceux-ci construisent une mesure de risque analogue à l'échelle de Richter qui permet de déterminer l'importance des mouvements de prix sur les marchés financiers. Cet indicateur correspond au Scale of Market Shocks (SMS). Cet indicateur a été calibré dans le but de mesurer les turbulences sur les prix de n'importe quel type d'actif financier. Cependant, Zumbach et *alii* (2000) ne l'appliquent qu'au marché des changes. Le point clé de la construction de cette mesure est l'analogie effectuée avec l'échelle de Richter pourtant utilisée dans un tout autre

environnement : la sismologie. Cette échelle a été créée par Richter (1935) et elle est définie comme le logarithme de l'énergie totale libérée lors d'un séisme. Cette mesure indique également l'inverse de la probabilité d'occurrence d'un mouvement du sol en fonction de l'intensité de la secousse. L'idée basique sur laquelle le SMS a été construit repose sur le fait qu'il existe une analogie entre la variation des prix des actifs et la vitesse modélisée comme une variation de la distance par rapport au temps. Etant donné que l'énergie correspond à la vitesse au carré, on peut donc assimiler la volatilité des prix des actifs à l'énergie dissipée. On passe donc de la formule de l'échelle de Richter :

$$R_t = \alpha \ln [p(E)]^{-1} \quad (3)$$

avec α un facteur d'échelle et E l'énergie dissipée par un séisme, à la formule du SMS :

$$SMS_t = \alpha \log_{10} [p(v)]^{-1} \quad (4)$$

avec v la volatilité historique des prix des actifs. Cependant, cette mesure de risque possède quelques limites. En effet, l'inconvénient principal réside dans le fait que cet indicateur ne prend pas en compte l'hétérogénéité des anticipations des agents financiers.

En résumé, le SMS ne se soucie pas du fait que les intervenants sur les marchés financiers puissent opérer à différentes fréquences.

2.2 L'INDICE DES CHOCS DE MARCHÉ DE MAILLET ET MICHEL (INDEX OF MARKET SHOCKS)

Après le SMS, Maillat et Michel (2003, 2005) développent l'Index of Market Shocks (IMS) également par analogie à l'échelle de Richter. Cet indicateur fournit à un instant donné et de façon synthétique des informations sur l'intensité des turbulences que subissent les marchés financiers. Cette mesure de risque, contrairement à son prédécesseur (le SMS), tient compte de l'hétérogénéité des agents intervenant sur les marchés financiers et permet donc d'intégrer différents horizons d'observations et de décisions. L'IMS vise donc à introduire une approche multidimensionnelle. Pour chaque fréquence d'observations, on calcule ainsi des volatilités à partir des prix des actifs. L'IMS et le SMS se différencient principalement par le fait que ce dernier ne permet pas de tenir compte des effets qui ont précédemment eu lieu. De plus, l'IMS permet d'ignorer les biais dus à la saisonnalité. Afin de décorréler les variances et donc pour éviter de biaiser les résultats finaux, Maillat et Michel (2003, 2005) appliquent une Analyse en Composantes Principales sur celles-ci en extrayant leurs facteurs communs. Un seuil arbitraire égal à 3 est fixé pour définir la valeur limite à laquelle on déclarera qu'un certain mouvement de prix sur les marchés correspondra à une crise financière.

L'IMS est donc un indice logarithmique qui s'écrit de la manière suivante :

$$IMS_t = - \sum_{k=1}^K \{ \omega_k \log_2 [1 - F(fac_k)] \} \quad (5)$$

où ω_k est la contribution du k -ième facteur fac_k à la variance totale des volatilités historiques et $F(.)$ est une fonction de densité cumulée de la loi de Gauss. Cependant, comme l'admettent leurs auteurs, l'IMS souffre de quelques limites que nous tentons de surmonter dans cette étude. Premièrement, Maillat et Michel (2003, 2005) calculent des volatilités à différentes fréquences fixées arbitrairement.

Deuxièmement, l'Analyse en Composantes Principales montre des limites lorsque les données sont non linéaires et non gaussiennes. Troisièmement, l'hypothèse de log-normalité de la volatilité, pour établir un jugement probabiliste de la volatilité agrégée du marché, ne permet pas de rendre compte pleinement des valeurs extrêmes. Ainsi, l'indicateur que nous tentons de mettre en place a pour but de dépasser ces contraintes afin de proposer une mesure de risque plus robuste à la nature des données étudiées.

2.3 LA CONSTRUCTION DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHÉ (*WhIMS*)

Le *WhIMS* est une mesure de risque tout comme l'*IMS* ou le SMS permettant d'évaluer l'intensité des crises financières sur les marchés. La construction de cet indicateur est basée sur une analogie avec l'échelle de Richter. Les principales étapes de la construction du *WhIMS* sont les suivantes :

- Reconstruction des trajectoires des rentabilités à différentes fréquences à partir d'une transformée en ondelette discrètes. Cet outil de décomposition des signaux permet au *WhIMS* d'être représentatif de toutes les échelles de temps et donc de tenir compte de l'hétérogénéité des anticipations des agents financiers. C'est ainsi que l'on peut considérer cette mesure de risque comme un indicateur multi-échelle.
- Extraction des composantes indépendantes et détermination des poids de chacune d'entre elles à partir d'une Analyse en Composantes Indépendantes (ACI). Cet outil d'analyse factorielle fournit de meilleurs résultats du fait qu'il s'adapte parfaitement à des signaux comme les séries financières qui ont des propriétés assez particulières.
- Elévation au carré des différentes composantes indépendantes afin d'obtenir des volatilités dites réalisées à différentes échelle de temps. En effet, le *WhIMS* permet de détecter les crises financières à partir du phénomène de hausse de la volatilité théoriquement et empiriquement observé sur les marchés financiers en période de turbulence.
- Ajuster les distributions de chaque composante à partir d'une loi *Generalized Pareto Distribution* (GPD). Nous pouvons ainsi améliorer l'estimation des queues de distributions et donc des phénomènes extrêmes.
- Calculer le *WhIMS* à l'aide de la formule suivante :

$$WhIMS_t = -\alpha \sum_{k=1}^K \{\omega_k \log_2[1 - F(x_k)]\} \quad (6)$$

où $F(\cdot)$ est la fonction de densité de probabilité, $[x_1, \dots, x_k]$ sont les composantes indépendantes et normalisées, ω_k est le poids de chaque composante déterminée comme la part de variance des données expliquée par la composante correspondante et α est un facteur d'échelle constant. Les principales techniques statistiques citées ci-dessus sont intégralement expliquées et développées dans la section suivante. Les motivations pour développer une telle mesure sont nombreuses. D'une part, le *WhIMS* est une mesure de risque qui permet d'alerter

les opérateurs financiers quant à leur exposition face au risque par l'évaluation de l'intensité des crises financières. D'autre part, l'introduction du concept d'hétérogénéité des agents financiers (Muller et *alii*, 1997) est important dans la mesure où une crise financière a des effets sur tous les opérateurs quelque soit leur horizon d'investissement. Plus précisément, les intervenants sur les marchés sont nombreux et les horizons d'investissement entre traders et investisseurs institutionnels sont très variables.

Une chute des cours des titres n'a ainsi pas les mêmes conséquences pour chacun d'entre eux. L'intérêt du *WhIMS* est d'être utile et interprétable pour tous les opérateurs. Cette mesure permet de comparer des périodes de turbulences boursières et de les classer selon une échelle de temps commune à tous les agents.

II. ETUDE DES TECHNIQUES STATISTIQUES PERMETTANT LA CONSTRUCTION DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHÉ (*WhIMS*)

Dans cette section, nous présentons les différentes approches statistiques utilisées dans la construction du *WhIMS*. Les méthodes utilisées sont principalement utiles dans la mesure où elles vont nous permettre d'éliminer les quelques limites dont ont fait l'objet les précédents indicateurs de crises financières.

1. LA METHODE DES ONDELETTES DISCRETES : UNE INTRODUCTION

La transformée en ondelettes discrètes est une innovation dans la modélisation des indicateurs de crises financières. En effet, Zumbach et *alii* (2000) et Maillat et Michel (2003, 2005) n'ont pas recours à cette technique qui va nous permettre de décomposer la volatilité réalisée en approximations et détails à différents niveaux. Nous introduisons le concept des ondelettes discrètes juste après avoir effectué une présentation générale sur les méthodes de décomposition du signal.

1.1 UNE PRESENTATION DES METHODES DE TRAITEMENTS DU SIGNAL

La transformée en ondelettes permet d'extraire du signal d'origine des informations qu'il ne serait pas possible de visualiser si nous souhaitions représenter graphiquement ce signal. Il existe une partie d'informations qui est cachée et qui ne peut apparaître qu'en ayant recours à cet outil. Considérons le cas de l'analyse de Fourier. La transformation de Fourier scinde les séries temporelles en composantes sinusoïdales de différentes fréquences. Chacune des sinusoïdes va avoir une fréquence spécifique mais une durée dans le temps infinie, nous avons une parfaite localisation fréquentielle mais non temporelle. On observe donc une perte d'information au niveau du temps. D'autre part, elle n'est pas applicable lorsque les signaux ou les séries temporelles étudiées ne sont pas stationnaires. Or, nous étudions et manipulons des séries temporelles financières qui sont caractérisées par des cycles réguliers intrinsèques et plusieurs caractéristiques variables comme la tendance ou les changements abruptes. L'analyse de Fourier n'est donc pas adaptée à détecter ce type de caractéristiques sur ce type de données.

Gabor (1946) propose alors une méthode pour éliminer ces inconvénients. Cette méthode consiste à appliquer l'analyse de Fourier sur des petits segments de temps du signal organisés en deux fonctions dimensionnelles de temps et de fréquence. La faiblesse de cette méthode provient du fait que la largeur des fenêtres est similaire pour toutes les fréquences.

La transformée en ondelettes va nous permettre de surmonter ces limites puisqu'elle fournit les fréquences et le temps et n'impose pas des largeurs de fenêtre identiques. De plus, elle est parfaitement applicable à des signaux non stationnaires. Pour faire face à la non stationnarité des signaux, la transformée en ondelettes permet la division du signal d'origine en plusieurs sous segments. Ces segments sont tous supposés stationnaires. Le problème de résolution est alors traité grâce à la sélection adéquate de la largeur de la fenêtre pour chaque sous segment. Il existe plusieurs méthodes d'analyse par ondelettes telles que la transformée en ondelettes continue ou la transformée en ondelettes discrètes. La version continue de la transformation par ondelette (connue sous le nom de CWT) suppose un signal sous-jacent continu, tandis que la transformation par ondelette discrète (DWT) assume une variable ou un signal constitué d'observations échantillonnées sur des points équidistants dans le temps.

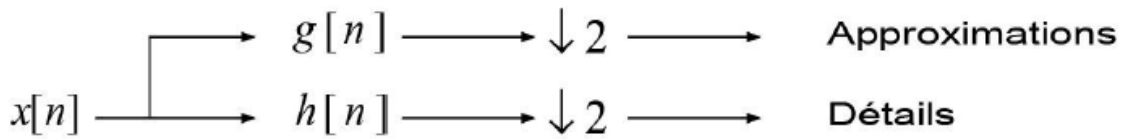
Pour le choix de la fonction de l'ondelette mère, nous utiliserons une ondelette de Daubechie. Il n'existe pas de critère universel pour le choix du type d'ondelette. Cependant, quelques problèmes peuvent apparaître lors de l'analyse multi-résolution si le filtre à ondelette ne correspond pas aux caractéristiques des séries temporelles. Concernant le choix du niveau de décomposition, une règle simple n'existe pas. Nous sélectionnons, dans notre application, le nombre de niveaux qui permettent des fluctuations de long terme.

1.2 LA TRANSFORMEE EN ONDELETES DISCRETES COMME METHODE DE DECOMPOSITION DU SIGNAL

La méthode des ondelettes discrètes est une technique utilisée dans la compression de données numériques avec ou sans perte. La compression consiste à approximer successivement, du plus grossier au plus fin, l'information initiale. L'analyse des ondelettes est un puissant outil permettant de décomposer une série temporelle donnée appelée « signal » en un ensemble hiérarchique d'approximations et de détails. Cet outil permet l'analyse du signal d'origine pour différentes bandes de fréquence avec différentes résolutions par une décomposition de la source de départ en une approximation et une déviation ou détail.

La transformée en ondelettes discrètes emploient deux fonctions : une fonction d'échelle et une fonction wavelet qui sont associées respectivement par des filtres dits low-pass et high-pass. La décomposition du signal est ensuite obtenue par des filtrations low-pass et high-pass.

Figure 1 : Décomposition du signal par la méthode de la transformée en ondelettes discrètes



D'après la figure 1, on observe facilement que la transformée en ondelettes discrètes va scinder en deux le signal d'origine, qui dans notre cas correspond aux rentabilités notée $r(t)$; et constitue dans notre schéma un premier niveau de décomposition. Une partie de notre sortie va constituer le détail D_1 du premier niveau de décomposition après avoir été filtré par la demi-bande high-pass $g(t)$ et une autre partie représente l'approximation du premier niveau de décomposition A_1 suite à une filtration par la bande low-pass $h(t)$.

La succession des filtrations va entraîner une augmentation du niveau de fréquence de résolution. L'opérateur « \downarrow » représente l'opérateur down sampling qui, dans l'étude des signaux, correspond au processus de réduction du taux d'échantillonnage du signal. Ici, on a une réduction de la moitié de ce taux d'échantillonnage (d'où la notation $\downarrow 2$). Enfin, les opérateurs « \rightarrow » représentent des relations d'implication. L'algorithme correspondant à la méthode des ondelettes est une combinaison des techniques de décomposition et de lissage. A chaque niveau de décomposition, une approximation A_j est construite ajoutée également à une déviation du signal notée D_j . On parle d'approximation et de détail du fait que A_1 approxime A_0 tout en tenant compte de la faible fréquence de A_0 tandis que D_1 correspond à la correction de la plus haute fréquence. On peut modéliser le signal initial par l'équation suivante :

$$r(t) = A_j(t) + \sum_{j=1}^J D_j(t) \quad (7)$$

où nous construisons, pour chaque niveau de décomposition $j = [1, \dots, J]$, les approximations A_j et les détails D_j . Toute décomposition repose sur la fonction wavelet ψ et sa fonction d'échelle ϕ associée. L'intégrale de ψ est nulle et elle est utilisée afin de définir les détails D_j tandis que l'intégrale de ϕ est égale à 1 et sert à définir les approximations A_j .

En donnant la forme de la fonction ψ c'est-à-dire en se fixant un type de filtre pour les ondelettes, il est possible de reconstruire les approximations et les détails pour chaque niveau de décomposition à partir des coefficients de la transformée en ondelettes discrètes notées C . La transformée en ondelettes C consiste à calculer un indice de ressemblance entre le signal d'origine $r(t)$ et la fonction des ondelettes ψ :

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(s)}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) ds \quad (8)$$

Cette transformation peut être appliquée pour des échelles discrètes ou continues. Pour une transformée en ondelettes continues, les paramètres d'échelle sont définis tels que $a \in R_*^+$ et $b \in R$. La transformée en ondelettes discrètes reprend les mêmes fonctionnalités que la transformée en ondelettes continues car elle est considérée comme la version d'échantillonnage de la transformée continue. Pour une fonction wavelet idéalement choisie,

on peut ainsi réécrire le signal d'origine à partir des coefficients de la transformée en ondelettes discrètes de la manière suivante :

$$x[n] = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K C(j, k) \psi_{j,k}[n] \quad (9)$$

où $x[n]$ est le signal discrétisé, avec j le niveau de décomposition et k la position des ondelettes sur l'axe des temps. En utilisant la formule (7), on peut alors obtenir des séries temporelles correspondant à une échelle particulière de fluctuations j en imposant simplement la nullité des coefficients des ondelettes pour toutes autres échelles. Précédemment, nous avons explicité les inconvénients que pouvaient apporter l'analyse de Fourier dus aux pertes d'information sur le temps et l'impossibilité de détecter la non stationnarité des séries étudiées. La méthode des ondelettes discrètes va nous permettre d'éliminer ces anomalies. L'intérêt de cette méthode pour l'analyse des séries financières, provient de sa capacité à analyser séparément les propriétés des variations des prix des actifs à court terme et à long terme. La méthode des ondelettes ne requière aucune hypothèse ou estimation de la distribution des rendements. Cependant, la longueur des séries temporelles étudiées et la difficulté d'interprétation des résultats peuvent constituer une limite à cette méthode.

1.3 QUELQUES APPLICATIONS DES METHODES DE DECOMPOSITION DU SIGNAL EN FINANCE

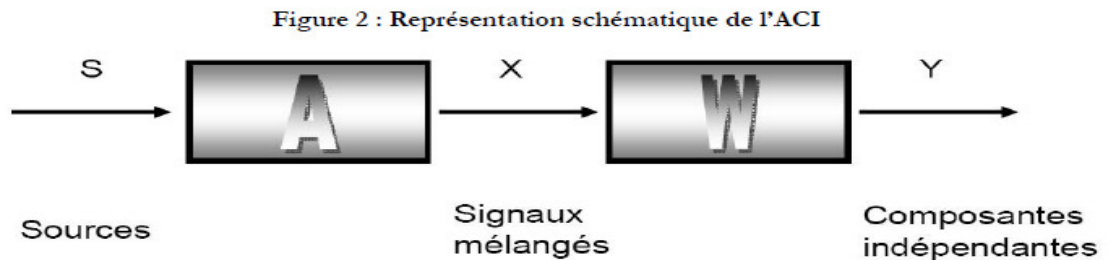
Il existe déjà une littérature consistante concernant l'analyse des séries financières à travers la méthode des ondelettes. Ramsey et Zhang (1995) appliquent les techniques des ondelettes afin de récupérer la structure dynamique des taux de change en données à haute fréquence. Fernandez (2004) étudie les conséquences des rendements du marché américain sur les marchés latino-américains et les marchés émergents. Lee (2004) trouve une forte relation entre les prix et la volatilité des marchés financiers américains et Sud-Coréens. Arneodo et alii (1998) sont les précurseurs de l'utilisation des ondelettes dans l'analyse des cascades de volatilité. Plus récemment, Gençay et alii (2001) proposent d'utiliser les ondelettes afin de déterminer les propriétés du marché des changes. Ils décomposent alors la variance d'une série temporelle et la covariance entre deux séries temporelles à travers la transformée en ondelettes discrètes. Galagedera et Maharaj (2008) étudient la relation entre les rendements d'un portefeuille et les co-moments d'ordre supérieurs à différentes échelle de temps à partir des ondelettes.

2. L'ANALYSE EN COMPOSANTES INDEPENDANTES : UNE INTRODUCTION

La méthode d'ACI brièvement résumée dans cette section, est une méthode très utilisée dans le traitement du signal. Le recours à l'ACI existe également dans d'autres domaines tels que l'analyse des signaux biomédicaux et le traitement des signaux de télécommunication. Les signaux sont perçus comme des mélanges de différentes sources physiques et de bruits extérieurs et le but est de déterminer les sources indépendantes. Dans un premier temps, nous présentons la définition formelle de cette méthode et ensuite, nous justifions son utilisation dans l'analyse de séries temporelles financières.

2.1 DEFINITION ET MOTIVATION A L'APPLICATION AUX SERIES FINANCIERES

L'ACI (voir Comon, 1994 et Hyvarinen et alii, 2001) est une méthode statistique qui permet d'exprimer un ensemble d'observations multidimensionnelles comme une combinaison de variables latentes inconnues. Ces variables latentes inconnues sont appelées « composantes indépendantes » et elles sont supposées être statistiquement indépendantes les unes des autres. Voici ci-dessous une représentation schématique du modèle d'ACI :



Avec l'opérateur « \rightarrow » représentant une relation d'implication. La figure 2 montre la forme la plus basique de l'ACI. Les sources d'origine sont mélangées à travers la matrice A pour former le signal observé X . La matrice de séparation W transforme le signal observé en composantes indépendantes notées Y . Ainsi, on obtient l'équation suivante :

$$x = f(\beta, S) \quad (10)$$

où x est un vecteur observé avec une taille $(m \times 1)$ et $f(\cdot)$ est une fonction de mélange inconnue avec β comme paramètre qui opère sur les variables latentes statistiquement indépendantes et regroupées dans le vecteur s de taille $(n \times 1)$. L'équation (10) peut être considérée comme un cas particulier lorsque la fonction est linéaire et donc :

$$x = AS \quad (11)$$

où A est une matrice de mélange inconnue de taille $(m \times n)$. Dans les formules (10) et (11), x et s sont des vecteurs aléatoires. Quand l'échantillon d'observations $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est disponible, nous avons $X = AS$, où la matrice X contient les observations x en colonne et identiquement, la matrice S possède les vecteurs de la variable latente s en colonne. La matrice de mélange A est supposée constante pour toutes les observations. Le processus de mélange est caché, alors seuls les signaux mélangés pourront être observés. L'objectif est maintenant de récupérer les signaux de la source d'origine à partir des observations grâce à un processus de séparation. Les équations suivantes (12) et (13) décrivent mathématiquement les processus de séparation :

$$Y = WX \quad (12)$$

et donc :

$$Y = WAS \quad (13)$$

La matrice S contient les signaux de la source d'origine dirigeant chacune des observations tandis que les signaux séparés sont stockés dans la matrice Y . La matrice W de taille $(m \times n)$ représente la matrice de séparation. Si les signaux séparés sont les mêmes que ceux de la source d'origine ($Y = S$), la matrice de mélange est égale à l'inverse de la matrice de séparation ($A = W^{-1}$). En général, quand A et S sont tous les deux inconnus, tout scalaire dans une des sources peut toujours être annulé en divisant les colonnes correspondantes de A par ce même scalaire. Donc, l'ACI ne peut déterminer les variances des composantes indépendantes, $\forall i \leq N$:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{c_j} (c_j s_j) \quad (14)$$

avec $E[s_j^2] = E[c_j^2 s_j^2] = 1$, $x_i = X_i$ et $s_j = S_j$.

Pour les mêmes raisons, l'ACI ne peut pas déterminer l'ordre des composantes indépendantes (les termes pouvant être librement changés) :

$$X = AS = AP^{-1}PS, \quad (15)$$

où P est la matrice de permutation, PS représente les composantes indépendantes d'origine mais dans un ordre différent et A la matrice de mélange inconnue. Il existe de nombreux algorithmes d'ACI qui ont été proposés dans la littérature dans le but de déterminer la matrice de séparation W . Afin de déterminer une telle matrice W , les hypothèses suivantes sont posées (Back et Weigend, 1997) :

- les sources sont statistiquement indépendantes. Bien que cela puisse paraître être une hypothèse forte, elle ne paraît pas irréaliste dans la mesure où l'on considère des sources de différentes origines allant, par exemple, des politiques étrangères à des variables microéconomiques qui pourraient impacter les prix des actifs
- de plus, une source a une distribution gaussienne
- les signaux sont stationnaires.

L'ACI n'est qu'un nouvel outil dans le domaine de la finance. Sa première application à un contexte financier a été effectuée par Back et Weigend (1997). Ils utilisent comme données d'entrée, le cours des actions des 28 plus grosses sociétés cotées à la bourse de Tokyo. Ils s'intéressent alors aux variations de prix de ces valeurs entre deux cours successifs. Ainsi, ils en déduisent que la sélection des quatre composantes indépendantes les plus significatives dans la variabilité des données permet de retrouver l'essentiel des variations de cours.

2.2 L'ESTIMATION DE L'ANALYSE EN COMPOSANTES INDEPENDANTES (ACI)

Une approche standard de l'algorithme permettant de modéliser l'ACI s'effectue selon une procédure en deux étapes (Cardoso, 1999 ; Cardoso et Souloumiac, 1993) : la décorrélation et la minimisation. Dans la première étape, nous cherchons à diagonaliser la matrice de covariance des inputs représentant les signaux. Ensuite, dans une seconde étape, nous tentons de minimiser une mesure de la statistique d'ordre supérieur assurant la non normalité des outputs (représentant également des signaux) qui sont statistiquement indépendants. Cela est mené à bien par une matrice de rotation unitaire (Cf. Cardoso et Souloumiac, 1993). La seconde étape fournit l'indépendance des ordres supérieurs. La tâche consiste à déterminer les variables latentes ou les sources s_j et les processus de séparation; dans le cas linéaire, la dernière tâche consiste à trouver la matrice de mélange A . Une approche assez courante consiste à déterminer une matrice de séparation W afin que les variables y_j de la relation (12) correspondent à une estimation de s_j . Ainsi, W peut être considéré comme une estimation de la matrice pseudo inverse de A . Souvent, les variables latentes s_j sont estimées une à une, en déterminant un vecteur colonne w_j tel que $y_j = w_j X$ soit une estimation de s_j .

Il existe différentes approches pour estimer les composantes indépendantes et la matrice de séparation, résultant des différents algorithmes. Dans toutes les approches, on sélectionne dans un premier temps une fonction objective notée $G(\cdot)$. La fonction G représente une fonction lissée de w qui mesure la qualité d'ajustement du résultat de l'estimation dans un sens ou dans un autre. Sa dérivée g , parfois appelée fonction d'activation, apparaît dans l'algorithme comme une fonction non linéaire.

- la première approche de l'ACI est basée sur des méthodes tensorielles. Les plus connus de ces algorithmes sont les FOBI (pour First-Order Blind Identification ; Cf. Cardoso, 1989, 1990) et JADE (pour Joint Approximate Diagonalization of Eigenmatrices ; Cf. Cardoso et Souloumiac, 1993). Les méthodes tensorielles sont des généralisations d'opérateurs linéaires - en particulier, les tenseurs cumulants sont des généralisations de la matrice de covariance. La décorrélation de l'ordre supérieur est approximée par la minimisation des cumulants d'ordre supérieur pour résoudre le modèle ACI. Cependant, ces méthodes sont très lourdes lorsque l'on manipule de grandes dimensions (Cf. Hivärinen et alii, 2001).
- la seconde approche pour l'estimation de l'ACI est l'estimation par le maximum de vraisemblance. Dans la méthode du maximum de vraisemblance, on choisit les valeurs des paramètres qui donnent la probabilité la plus élevée correspondant aux observations conjointes. Si l'information sur les paramètres est prise en compte, la méthode devient a posteriori un maximum. L'algorithme ACI basé sur la méthode du maximum de vraisemblance inclut l'algorithme de Bell-Sejnowski (Cf. Bell et Sejnowski, 1995).
- la troisième approche est la maximisation des composantes non gaussienne. D'après le théorème central limite, les sommes des variables aléatoires indépendantes et non gaussiennes sont beaucoup plus difficiles à rendre gaussiennes que les variables aléatoires d'origine. Donc une combinaison linéaire $y = \sum b_i x_i$ des variables observées x_i (qui en retour sont des combinaisons linéaires des composantes indépendantes s_j) sera au maximum non gaussienne si elle égalise une des composantes indépendantes s_j . Par conséquent, l'objectif est de trouver w_j tel que la distribution de $y_j = w_j X$ s'éloigne le plus possible de la gaussianité. Dans la littérature, beaucoup de mesures de non normalité sont proposées et les plus utilisées sont les cumulants d'ordre supérieur tel que la kurtosis qui est défini ainsi :

$$Kurt(y) = \frac{E[y^4]}{[E(y^2)]^2} \quad (16)$$

Pour une variable gaussienne, la kurtosis est égale à 3. Mais la mesure de non normalité n'est pas robuste face aux valeurs aberrantes. Les mesures robustes ont été présentées par Hyvarinen (1999). Il est possible de montrer que la non normalité peut avoir une connexion rigoureuse avec la minimisation de l'information mutuelle, exprimée en termes d'entropies marginales des variables. L'entropie d'un vecteur aléatoire y avec pour densité $f_y(\mu)$ est :

$$H(y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(\mu) \log(f_y(\mu)) d\mu \quad (17)$$

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, la mesure de la non-gaussianité correspond à la valeur absolue de la kurtosis or cette mesure est insuffisamment robuste donc on va utiliser la néguentropie qui est définie ainsi :

$$J(y) = H(y_{gauss}) - H(y) \quad (18)$$

où y_{gauss} est une variable gaussienne avec la même matrice de corrélation que y . Entre les variables aléatoires de variance unitaire, une variable gaussienne possède la plus large entropie. La néguentropie (18) est une mesure appropriée de l'entropie; cette mesure est invariante pour des transformations linéaires inversibles. Elle est souvent non nulle ou égale à zéro pour les variables gaussiennes. Pour maximiser l'indépendance entre les variables aléatoires, une idée consisterait à introduire des variables non gaussiennes. De plus, l'estimation de la néguentropie requiert la connaissance de la fonction de distribution.

Cette mesure est difficile à estimer et la néguentropie est approximée en pratique par des ordres cumulant :

$$J(y) = \frac{1}{12} E^2(y^2) + \frac{1}{48} Kurt(y)^2 \quad (19)$$

Dans toutes les approches de l'ACI précédemment citées, nous choisirons d'utiliser l'algorithme *FastICA* (Hyvärinen, 1999; Hyvärinen et alii, 2001 et Hyvärinen et Oja, 1997) basé sur une approximation de la néguentropie.

2.3 L'ALGORITHME FASTICA ET CICA

Bien que nous puissions mesurer la non normalité par la kurtosis, nous avons mentionné précédemment que la mesure est cependant très sensible aux valeurs aberrantes. La néguentropie correspondrait à une alternative car celle-ci est basée sur la quantité d'information théorique de l'entropie. Un résultat fondamental de la théorie de l'information est résumé par le fait qu'une variable gaussienne possède la plus large entropie par rapport à toutes les variables aléatoires qui égalisent sa variance. C'est pourquoi, la néguentropie définie ci-dessus est toujours égale ou supérieure à zéro. La néguentropie est nulle si elle correspond à une distribution gaussienne. Dans l'algorithme *FastICA*, une version approximée de la néguentropie (afin d'obtenir des estimateurs plus robustes) est utilisée tel que :

$$J(y) = \{E[G(y)] - E[G(N(0,1))]\}^2, \quad (20)$$

où $N(0,1)$ est une variable aléatoire standard et gaussienne et G est une fonction uniforme. La fonction uniforme G est approximée par :

$$G(y) = \frac{1}{a} \log[\cosh(ay)], \quad (21)$$

avec $a \in R^*$. L'algorithme *FastICA* est un algorithme itératif à partir d'un point fixe avec la mise à jour suivante de W :

$$W \leftarrow E[Xg(WX)] - E[g'(WX)]W, \quad (22)$$

où « \leftarrow » représente une mise à jour de la valeur de W , la matrice de séparation. La fonction non linéaire $g(\cdot)$ est la dérivée de la fonction de contraste non quadratique G , qui mesure la néguentropie ou la non normalité. La vitesse de convergence élevée dans les itérations de l'algorithme *FastICA* constitue une propriété importante.

3. REPARTITION DES VALEURS EXTREMES : ESTIMATION D'UNE DISTRIBUTION GENERALISEE DE PARETO A L'AIDE DE LA METHODE DES TL-MOMENTS

De récentes tentatives de modélisation des distributions dans le cadre multivarié ont été effectuées à l'aide des statistiques d'ordre, pour la calibration de copules de Bernstein développé par Baker (2008), ou pour définir des valeurs extrêmes nous utilisons les L-moments développés par Serfling et Xia (2007). Ces derniers, qui sont des fonctions linéaires des estimations des statistiques d'ordre, ont été introduits par Sillito (1951) et largement reprises par Hosking (1989).

Un des principaux avantages des statistiques d'ordre en comparaison aux moments conventionnels est leur faible sensibilité aux variations de l'échantillon de test dans la mesure où elles sont des fonctions linéaires des données ordonnées. Il a été montré qu'elles permettent d'obtenir des estimateurs robustes des moments d'ordre supérieur et elles trouvent de larges applications dans différents domaines où l'occurrence d'évènements extrêmes est courante. On peut citer la météorologie, l'hydrologie, l'étude des tremblements de terre (voir Thompson et alii, 2007). Plus précisément, les L-moments sont définis comme des fonctions linéaires des moments pondérés par des probabilités conditionnelles et elles permettent une meilleure caractérisation des fonctions de distribution comparée aux moments conventionnels. En effet, leur existence n'est pas conditionnée par l'existence des moments conventionnels. De plus, leur programmation est plus aisée et ils constituent de meilleurs estimateurs pour des distributions à queue épaisses.

Afin de caractériser le *WhIMS*, nous utilisons une GPD estimé par la méthode généralisée des *trimmed L-moments* (TL-moments) (Bali, 2003a et 2003b et Hosking, 2007). La distribution des facteurs indépendants de semi-volatilité est noté $\hat{\sigma}$. La GPD est défini par trois paramètres : $\nu \in \mathcal{R}$, le paramètre de localisation, $\alpha \in \mathcal{R}_+$, le paramètre de dispersion et $\xi \in \mathcal{R}$ celui de forme. Elle est donnée par

$$G_{\xi}(\hat{\sigma}) = \begin{cases} 1 - \left[1 + \xi \frac{(\hat{\sigma} - \nu)}{\alpha} \right]^{-\xi^{-1}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp \left[-\frac{(\hat{\sigma} - \nu)}{\alpha} \right] & \text{sinon,} \end{cases} \quad (23)$$

Pour tous $\hat{\sigma} \in \mathcal{D}$, définit par :

$$\mathcal{D} = \begin{cases}] - \infty; \nu - \frac{\alpha}{\xi} [& \text{si } \xi < 0 \\ \mathcal{R} & \text{si } \xi = 0 \\] \nu - \frac{\alpha}{\xi}; +\infty [& \text{si } \xi > 0 \end{cases}$$

Cela nous permet d'en déduire les comoments d'ordre 3 et 4 de la loi normalisé de la GPD:

$$\begin{cases} \kappa_3 = \frac{2\alpha^3(1 + \xi)}{(1 - \xi)^3(1 - 2\xi)(1 - 3\xi)} \\ \kappa_4 = \frac{3\alpha^4(3 + \xi + 2\xi^2)}{(1 - \xi)^4(1 - 2\xi)(1 - 3\xi)(1 - 4\xi)} \end{cases} \quad (24)$$

De plus, les trois premiers TL-moments, fonction des trois paramètres caractéristiques d'une distribution GPD, sont données pour chaque $(s, t) \in \mathbb{N}^2$, par:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(s,t)} = \nu - \frac{\xi}{\alpha} + \frac{(1+s+t)!}{t!} \frac{\Gamma(t-\xi+1)}{\Gamma(2+s+t-\xi)} \frac{\xi}{\alpha} \\ \lambda_2^{(s,t)} = \alpha \frac{(2+s+t)!}{2(t+1)!} \frac{\Gamma(t-\xi+1)}{\Gamma(3+s+t-\xi)} \\ \lambda_3^{(s,t)} = \alpha(1+\xi) \frac{(3+s+t)!}{3(t+2)!} \frac{\Gamma(t-\xi+1)}{\Gamma(4+s+t-\xi)} \end{cases} \quad (25)$$

où $\lambda_r^{(s,t)}$ est le $r^{i\grave{e}me}$ TL-moment tronqué en (s, t) , $\nu \in \mathcal{R}$, le paramètre de localisation, $\alpha \in \mathcal{R}_+$, le paramètre dispersion et $\xi \in \mathcal{R}$ le paramètre de forme et $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ la fonction Gamma.

III. MODELISATION ET CARACTERISATION DES ETATS DE CRISE DANS LES MARCHES FINANCIERS

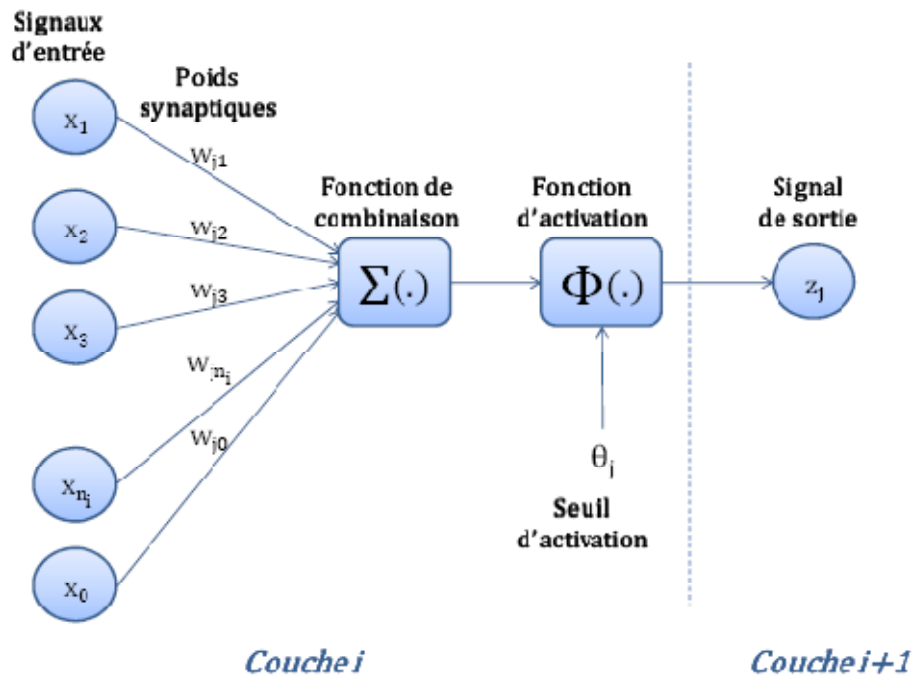
1. LES RESEAUX DE NEURONES ARTIFICIELS

Les réseaux de neurones artificiels sont à l'origine d'une tentative de modélisation mathématique du cerveau humain. La modélisation consiste à mettre en œuvre un système de réseaux neuronaux sous un aspect non pas biologique mais artificiel. Ainsi, un réseau de neurones sera en général composé d'une succession de couches dont chacune prend ses entrées sur les sorties de la précédente. A chaque neurone d'une couche sera associé un poids synaptique.

La fonction de combinaison réalise ensuite le produit scalaire entre les n_i neurones de la couche i et leurs poids associés. On désignera par w_{ij} le poids reliant le neurone i d'une couche j et le neurone de la couche suivante. La fonction d'activation permettra ensuite d'introduire une non-linéarité dans le fonctionnement du réseau, en dessous du seuil θ_j le neurone de sortie z_j sera inactif, aux alentours du seuil, il existera une phase de transition et au-dessus le neurone de sortie z_j sera actif.

L'analogie du neurone artificiel avec celui du modèle biologique suppose que l'on a une correspondance pour chaque élément composant le neurone biologique, donc une modélisation pour chacun d'entre eux. Ainsi, les synapses correspondent aux poids de connexions (ou poids synaptiques), les axones aux signaux de sortie, les dendrites aux signaux d'entrée et le soma à la fonction d'activation.

Figure 3 : une représentation du fonctionnement d'un neurone artificiel

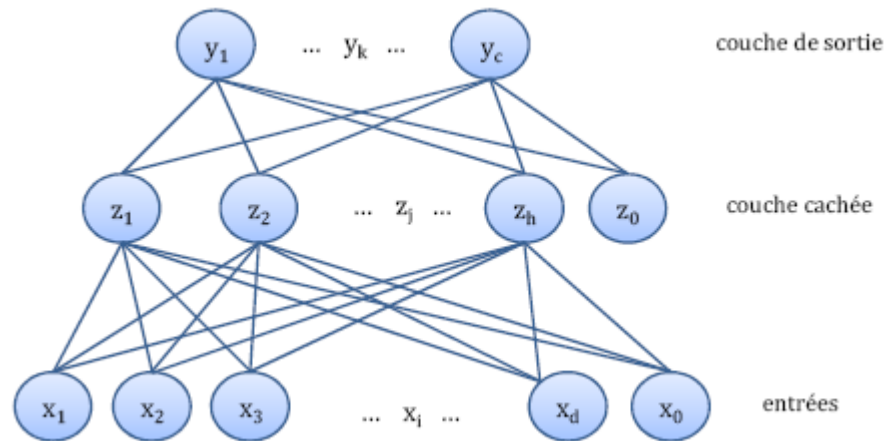


Source: D'après une représentation des auteurs

2. UNE PRESENTATION DU PERCEPTRON MULTICOUCHE

Les réseaux de neurones à couches ont la propriété générale d'être des approximateurs universels parcimonieux. Ceci peut s'énoncer de la façon suivante : « toute fonction bornée suffisamment régulière peut être approchée uniformément, avec une précision arbitraire, par un réseau de neurones comportant une couche de neurones cachés en nombre fini, possédant tous la même fonction d'activation, et un neurone de sortie linéaire » (K. Hornik, M. Stinchcombe et H. White, 1989, "Multilayer Feedforward Networks are Universal Approximators", Neural Networks Vol. 2, p 359). Le perceptron simple de Rosenblatt (1957) est un réseau à couches ne comportant que deux couches, les seules liaisons neuronales autorisées vont donc de la couche d'entrée vers les neurones de sortie. Dès lors, il ne constitue pas un approximateur parcimonieux et ne peut résoudre que des problèmes linéairement séparables. Le perceptron multicouche solutionne ce problème puisqu'il autorise un nombre de couches supérieur, ainsi il présente au moins une couche cachée ce qui lui permet d'être apte à résoudre des problèmes plus complexes non linéairement séparables. Il permet de modéliser une fonction par une régression non linéaire ce qui en fait le réseau le plus utilisé en finance pour approximer les séries de données. Chaque couche de ce perceptron comporte plusieurs neurones et chaque neurone représente une unité de calcul autonome reliée aux neurones de la couche précédente. C'est un réseau dit acyclique, c'est-à-dire qu'il n'a pas de connexion vers l'arrière, et totalement connecté, chaque neurone d'une couche est relié à tous les neurones de la couche précédente. Dans la majorité des cas, une seule couche cachée permet de résoudre des problèmes complexes, ainsi un perceptron multicouche est souvent représenté avec une architecture à trois couches.

Figure 4 : une représentation d'un réseau de neurones à trois couches



Source: D'après une représentation des auteurs

Son fonctionnement repose sur le principe de la circulation de l'information depuis les neurones d'entrée jusqu'aux neurones de sortie. Chaque neurone caché j reçoit une activation (entrée) correspondant à la combinaison linéaire des d entrées :

$$a_j = \sum_{i=0}^d w_{ji} x_i \quad (26)$$

où a_j représente la valeur de l'activation du $j^{\text{ème}}$ neurone sur la couche cachée, x_i correspond à la valeur du neurone i , w_{ji} est le poids de la connexion reliant le neurone caché j au neurone sur la couche précédente, d le nombre de neurones de la couche précédente x_0 correspond à la constante associée à la couche d'entrée.

La sortie d'un neurone caché j , z_j , correspond à la transformation non linéaire de l'activation a_j par une fonction dite d'activation $f(.)$:

$$z_j = f(a_j)$$

La fonction d'activation sert à déterminer l'impulsion à envoyer aux neurones de la couche qui suit afin de calculer le potentiel de sortie. C'est une fonction nécessairement différentiable. La fonction $f(.)$ est une fonction non linéaire de type logistique, tangente hyperbolique ou sigmoïde. De la même façon, chaque neurone de sortie k reçoit une activation correspondant à la combinaison linéaire des sorties des h neurones cachés :

$$a_k = \sum_{j=0}^h w_{kj} z_j \quad (27)$$

La valeur d'un neurone de sortie k correspond également à la transformation de l'activation a_k par une fonction $g(.)$:

$$y_k = g(a_k) \quad (28)$$

La fonction $g(.)$ est différente de la fonction $f(.)$ car les neurones de sortie et les neurones cachés ont des rôles distincts. Les fonctions d'activation permettent d'introduire une non-

linéarité dans le fonctionnement du neurone. Ainsi, la sortie donnée par le perceptron multicouche peut être vue comme une composition de fonctions des entrées.

Pour que le perceptron multicouche conserve sa propriété d'approximateur universel, il faut que la fonction d'activation soit localement majorée, continue par morceaux et qu'elle ne soit pas de forme polynomiale.

3. L'APPRENTISSAGE PAR RETRO-PROPAGATION

La notion d'apprentissage repose sur deux principes qui sont souvent traités de façon successive : la mémorisation et la généralisation. L'apprentissage consiste à modifier le poids des connections entre les neurones. En effet, c'est l'ensemble des poids des liaisons synaptiques qui détermine le fonctionnement du réseau de neurones. Lorsque des exemples sont présentés au réseau, celui-ci cherche à atteindre un état stable. Le but est alors d'optimiser le réseau en trouvant les poids qui minimisent l'erreur. Pour cela, on utilise la méthode de descente de gradient. On considère le vecteur du gradient de l'erreur des poids $\nabla \varepsilon[w]$ d'un modèle ayant p poids, ε est différentiable et a la forme suivante :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^c (\hat{y}_k - y_k)^2 \quad (29)$$

où \hat{y}_k correspond à la sortie du neurone k calculée par le réseau et y_k est la sortie théorique, qui s'est effectivement réalisée, c correspond au nombre de neurones sur la couche de sortie. Le gradient de l'erreur s'écrit alors :

$$\nabla \varepsilon[w] = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial w_0}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_p} \right] \quad (30)$$

avec w_n pour $n \in \{0, \dots, p\}$ pour qui représente le poids associé au neurone n . La règle de descente de gradient est la suivante :

$$w^{(\tau+1)} \leftarrow w^{(\tau)} - \eta \nabla \varepsilon[w^{(\tau)}] \quad (31)$$

où $w^{(\tau+1)}$ correspond au vecteur de poids recalculé après la présentation d'un $\tau + 1$ ^{ième} exemple au réseau, le signe \leftarrow représente l'affectation et η est le taux d'apprentissage, il règle la grandeur du pas.

Le principe est donc de calculer l'erreur aux neurones de sortie, puis on redescend des sorties vers les entrées pour calculer les dérivées de l'erreur par rapport aux poids. Ce gradient de l'erreur est ensuite utilisé pour ajuster les poids du réseau. On dit que l'apprentissage se fait par rétro-propagation. La dérivée de l'erreur ε par rapport au poids de la connexion allant du neurone j au neurone k de la couche suivante peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial w_{kj}} = \delta_k z_j \quad (32)$$

où w_{kj} correspond au poids de la connexion entre le neurone j de la couche cachée et le neurone k de la couche de sortie, δ_k correspond à la dérivée partielle de ε par rapport à l'entrée du neurone k et z_j est le j ^{ième} neurone sur la couche cachée. La valeur de δ_k dépend de la fonction d'erreur et de la fonction d'activation utilisées. Dans notre étude, δ_k sera de la forme $|\hat{y}_k - y_k|$ avec \hat{y}_k la valeur calculée par le réseau et y_k la valeur observée. L'algorithme de rétro-propagation est détaillé en annexe 1.

4. LES CHAINES DE MARKOV CACHEES ASSOCIEES AUX RESEAUX DE NEURONES

Nous allons donc tenter dans cette section de déterminer les états du marché en utilisant un modèle combinant des réseaux de neurones et une chaîne de Markov cachée. Pour cela, nous utiliserons l'indicateur de choc sur les marchés financiers, le *WhIMS (Wavelet-heterogeneous Index of Market Shocks)* construit précédemment. Cet indicateur va nous permettre d'apporter une information supplémentaire au réseau, celle de l'état du marché (en particulier sa volatilité). Le but est de distinguer l'état dans lequel se trouve le marché à chaque instant : volatilité élevé, stable ou faible, puis de donner la prévision issue du perceptron le plus pertinent à cet instant. Une chaîne de Markov cachée sera ensuite utilisée pour détecter les phases de marché, c'est-à-dire les probabilités de chaque expert.

Les modèles de Markov cachés ont été introduits par Baum et *alii* dans les années 1960. La plupart des approches basées sur les chaînes de Markov cachées sont dédiées à la reconnaissance de la parole. Les chaînes de Markov cachées (*Hidden Markov Models* en anglais ou HMM) modélisent des phénomènes aléatoires dont on suppose qu'ils sont composés à un premier niveau d'un processus aléatoire de transition entre des états inobservables (les états cachés) et à un second niveau d'un autre processus aléatoire qui dans chaque état engendre des valeurs observables (appelées observations). Une chaîne de Markov cachée décrit un système qui à chaque instant se trouve dans un des N états.

D'un ensemble $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$. Un processus aléatoire gère la transition d'état à état, mais l'état du système n'est pas observable, on ne voit que les émissions de cet état c'est-à-dire les observations. Autrement dit, au temps t , le système est dans l'état q_t (invisible) et émet l'observation O_t (visible). Ces observations peuvent prendre leurs valeurs dans un ensemble fini de valeurs discrètes ou de symboles, ou dans un ensemble continu et infini.

La particularité de chaque état est que l'émission des observations est réalisée avec des distributions de probabilité qui lui sont propres. A chaque instant t , le système va donc effectuer des tirages aléatoires à deux niveaux : le premier détermine la transition depuis q_{t-1} l'état vers l'état q_t , le second détermine l'observation tirée dans l'état q_t . Nous définissons ci-après l'ensemble des notations qui seront utilisées pour définir les chaînes de Markov cachées.

$\lambda = (A, B, \pi)$	Modèle HMM
$S = \{S_i\}$ avec $i = 1, \dots, N$	N états possibles de la chaîne
$A = \{a_{ij}\}$ avec $i, j \in \{1, \dots, N\}$	Matrice des probabilités de transition
$a_{ij} = P(q_t = S_j q_{t-1} = S_i)$	Probabilité de passer de l'état S_i à l'état S_j
$\pi = \{\pi_i\}$ avec $i = 1, \dots, N$	Vecteur de probabilité à l'instant initiale
$O = \{O_t\}$ avec $t = 1, \dots, T$	Ensemble des observations émises dans
$V = \{v_k\}$ avec $t = 1, \dots, T$	Ensemble des valeurs discrètes observables
$B = \{b_j(k)\}$	Matrice d'émission des valeurs observable V .
$b_j(k) = P(O_t = v_k q_t = S_j)$	Probabilité d'observer la valeur v_k dans l'état S_j

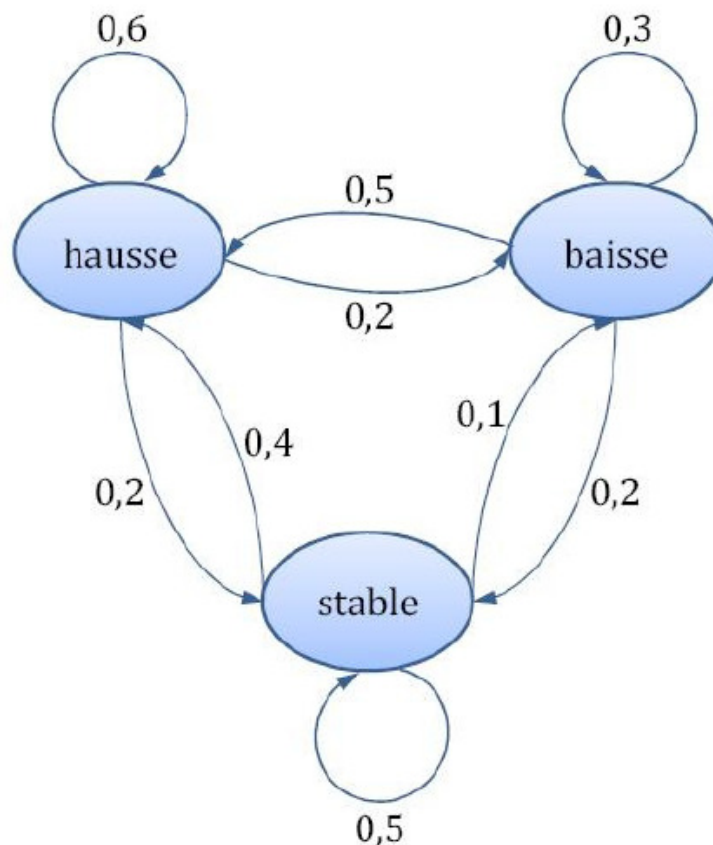
L'hypothèse de Markov nous dit que la probabilité que le système soit dans un état donné à la date t ne dépend que de l'état dans lequel il était à la date précédente, soit $P(q_t|q_{t-1}, \dots, q_1) = P(q_t|q_{t-1})$.

Pour illustrer le mécanisme d'une chaîne de Markov simple, nous pouvons prendre l'exemple d'un modèle à trois états $S = \{hausse, baisse, stable\}$ pour définir l'évolution d'un cours boursier. On se donne le vecteur des probabilités initiales et la matrice de transition suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \pi = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

On peut représenter ce modèle sous la forme schématique suivante :

Figure 5 : Exemple de représentation d'un modèle à chaîne de Markov simple



Un modèle de chaîne de Markov cachée à partir de ce modèle serait d'estimer si le cours de notre actif monte, descend ou reste stable en fonction de l'évolution d'un indice ayant parmi ses constituants l'actif en question. Si on part du principe que l'on ne peut pas observer directement le cours de l'actif, on peut se poser la question de savoir quelle est la probabilité que le cours de l'actif ait monté sachant que celui de l'indice a chuté par exemple. Ce modèle ainsi décrit peut être représenté par un modèle de chaînes de Markov cachées.

L'emploi des chaînes de Markov cachées permet de résoudre trois grands types de problèmes :

- ✓ connaissant le modèle λ , calculer la probabilité d'émission d'une séquence particulière (se résout à l'aide de l'algorithme de Viterbi)
- ✓ connaissant le modèle λ , trouver la séquence la plus probable d'état (caché) ayant conduit à la génération d'une séquence de sortie donnée (se résout également à l'aide de l'algorithme de Viterbi)
- ✓ Etant donné une séquence de sortie, retrouver l'ensemble d'états le plus probable et les probabilités des sorties sur chaque état. Pour cela, on utilise deux algorithmes appropriés, les algorithmes de Baum-Welch (1972) et de Viterbi (1967). Ces deux algorithmes sont explicités en annexe 2.

IV. ETUDE EMPIRIQUE : UNE APPLICATION DU NOUVEL INDICE DES CHOCS DE MARCHE (WHIMS) AU CAC40

Après avoir expliqué les différents concepts statistiques qui sont utiles à la modélisation du *WhIMS* et rappelé les sources à partir desquelles le *WhIMS* s'inspire, nous abordons désormais la partie pratique : la construction du *WhIMS* à partir de données empiriques. Nous disposons de données intra-quotidiennes avec 30 minutes d'intervalle entre chaque observation. Ces données correspondent au cours de l'indice phare parisien : le CAC40. La période d'étude s'étend de janvier 1997 à Juin 2009. Dans un premier temps, nous étudions les propriétés statistiques de nos données. Ensuite, nous appliquons à la rentabilité intra-quotidienne du CAC40 une transformée en ondelettes discrètes qui nous fournit différents signaux qui servent de sources pour notre ACI. Enfin une modélisation HMM et une classification de kohonen est proposé pour caractériser les états de crises.

1. LES DONNEES

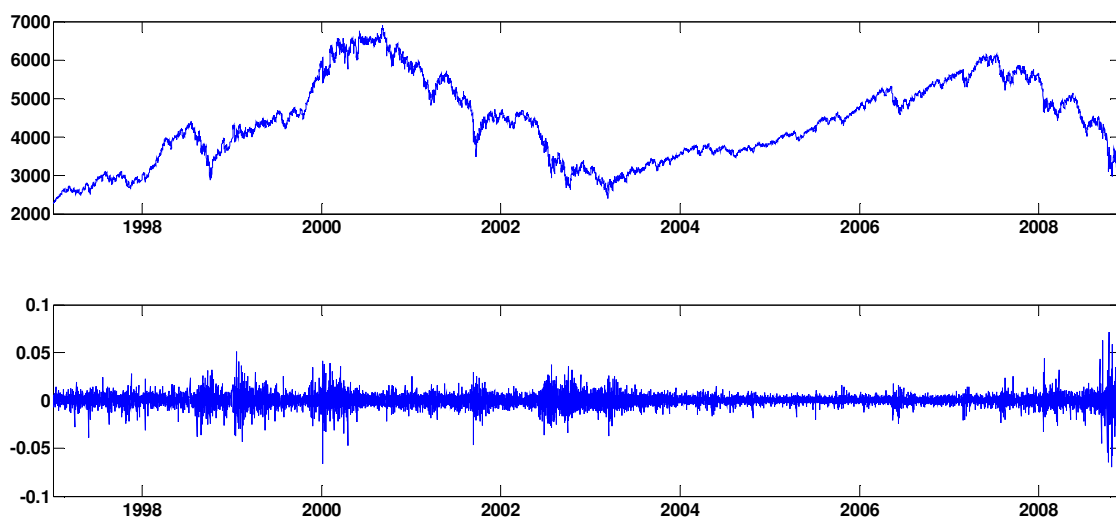
Notre application se concentre sur le marché des actions françaises et plus précisément sur l'indice phare de la place financière parisienne : le CAC40. Cet indice en cotation continue est mis en place à la fin de l'année 1987 et est défini à une valeur initiale de 1000 points. Nous disposons de données intra-quotidiennes dont la fréquence d'échantillonnage est de 30 minutes de janvier 1997 à juin 2009. La période d'étude va nous permettre de rendre compte de trois événements majeurs :

- La crise asiatique de 1998 est une crise économique qui a plus particulièrement les pays du Sud-est de l'Asie tout en se propageant sur les places boursières mondiales. La crise a été initiée par la chute de la devise locale thaïlandaise entraînant une perte de confiance.
- L'éclatement de la bulle Internet en 2000 avec la chute des cours des valeurs technologiques va se répercuter sur l'ensemble des marchés mondiaux et sera accentuée par les événements du 11 Septembre 2001. La baisse continue du CAC40 ne s'achèvera qu'en Mars 2003. On a parlé de la bulle Internet car tous les investisseurs (par effet de « mode ») se sont mis à spéculer sur ces valeurs et ont donc participé au

gonflement de cette bulle jusqu'à son éclatement. Voici une illustration des données dont nous disposons.

- La crise des *subprimes* s'est déclenchée au deuxième semestre 2006 qui a dégénéré à son tour en une crise globale du crédit, laquelle a elle-même créé des problèmes de liquidité et de solvabilité dans le système financier global. Ces problèmes ont entraîné une contraction du crédit, qui pèse sur la consommation et l'investissement et qui débouche sur une crise économique mondiale. Les prix de l'immobilier continuent de baisser aux Etats-Unis, cela représente pour les ménages américains un choc de patrimoine et de revenus. Il y a une contraction du crédit avec une réduction de la propension à prêter des banques. De plus, le coût du financement par les obligations a explosé pour les entreprises, les spreads de crédit sont à des niveaux record, sans que l'on puisse mesurer ce qui relève des facteurs fondamentaux et ce qui ressort de l'illiquidité actuelle des marchés du crédit.

Figure 6 : Cours et rendements intra quotidiens du CAC40



Source: *Euronext*. Données simulées à partir des prix de clôture du CAC40 du 02/01/1997 au 02/06/2009 en fréquence intra quotidienne avec 30 minutes d'intervalle entre chaque observation. Le graphique du haut représente l'évolution du cours du CAC40 sur la période étudiée et le graphique du bas représente les rendements logarithmiques du CAC40. Calculs effectués par les auteurs.

Le premier graphique de la figure 6 montre très clairement le krach dû à l'éclatement de la bulle Internet fin 2000. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le CAC40 connaît une chute prolongée qui ne cesse qu'en 2003. On observe donc deux tendances dans l'échantillon des cours du CAC40 que nous allons étudier : dans un premier temps, on a une phase de baisse puis dans un second temps, on enregistre une phase haussière.

Ces deux tendances sont très utiles pour notre étude car elles nous permettent de tester la fiabilité du *WhIMS*, c'est-à-dire différencier l'état de crise et la période haussière qu'à connu

l'indice phare parisien durant la période étudiée. Dans le second graphique représentant les rentabilités du CAC40, nous observons des *clusters* de volatilité. Ces noyaux correspondent à une des caractéristiques principales des séries financières qui rendent impossible l'estimation et la prévision à partir des modèles traditionnels linéaires de type ARMA (Auto-Regressive Mobile Average) mais nous contraint à utiliser les modèles non linéaires de type ARCH (Auto-Regressive Conditional Heteroscedaticity) introduits par Engle (1982). Voici quelques statistiques, à titre indicatif, des rentabilités du CAC40 :

Table 1 : Statistiques descriptives sur la série de rentabilité du CAC40

Min.	Max.	Mean	Standard Deviation	Mediane	Skewness	Kurtosis	Negative Frequency
-7.00%	7.14%	.00%	.38%	.00%	-.18	32.16	48.99%

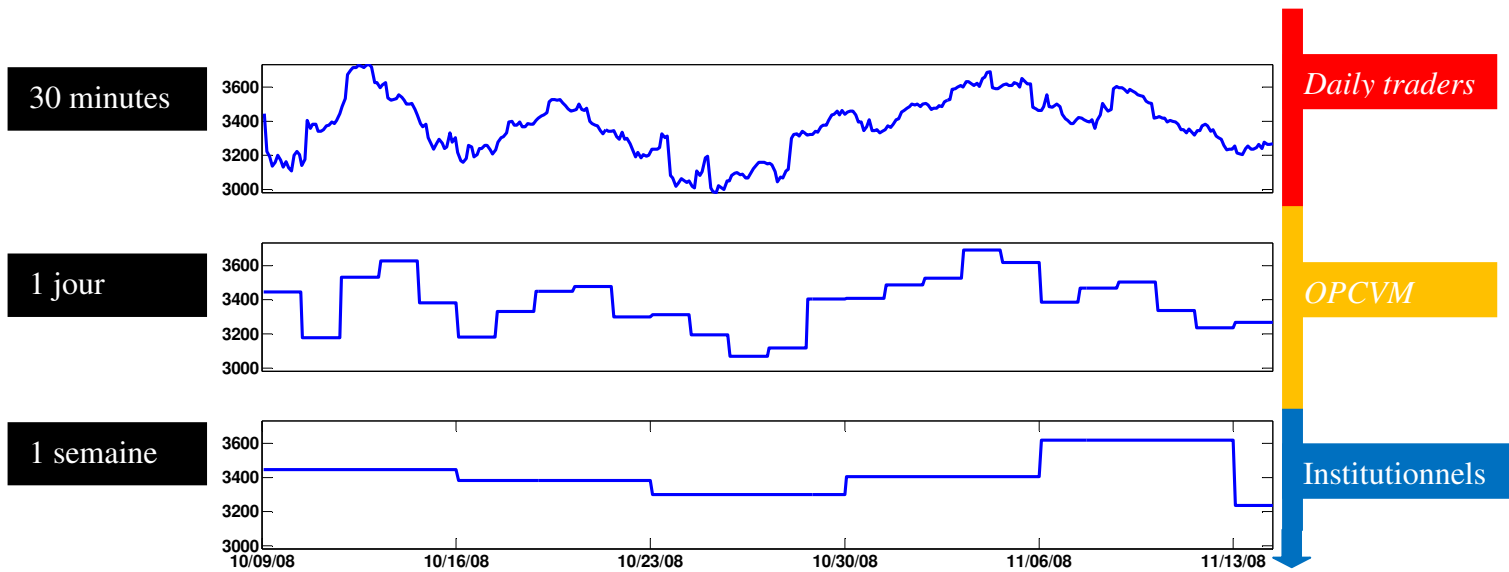
Source: *Euronext*. Données intra quotidiennes du CAC40 avec une fréquence d'échantillonnage de 30 minutes du 02/01/1997 au 02/06/2009. Calculs effectués par les auteurs.

Une des premières remarques sur les rentabilités est qu'ils ne suivent pas du tout une loi Normale. En effet, la série des rentabilités du CAC40 est asymétrique et possède des queues de distribution épaisses. C'est la principale raison pour laquelle nous ajustons, dans le calcul du *WhIMS*, les probabilités de distribution à partir d'une G.P.D. (Generalized Pareto Distribution). Cette technique permet ainsi de mieux rendre compte des phénomènes extrêmes caractéristiques principales des séries financières.

2. LE PHENOMENE D'HETEROGENEITE DES MARCHES FINANCIERS

Afin de rendre compte du phénomène d'hétérogénéité des anticipations des investisseurs, nous avons représenté graphiquement les prix du CAC40 à différentes échelles de temps sur une petite période d'un mois sur la figure 7.

Figure 7 : Evolution temporelle du cours du CAC40 à différentes échelles

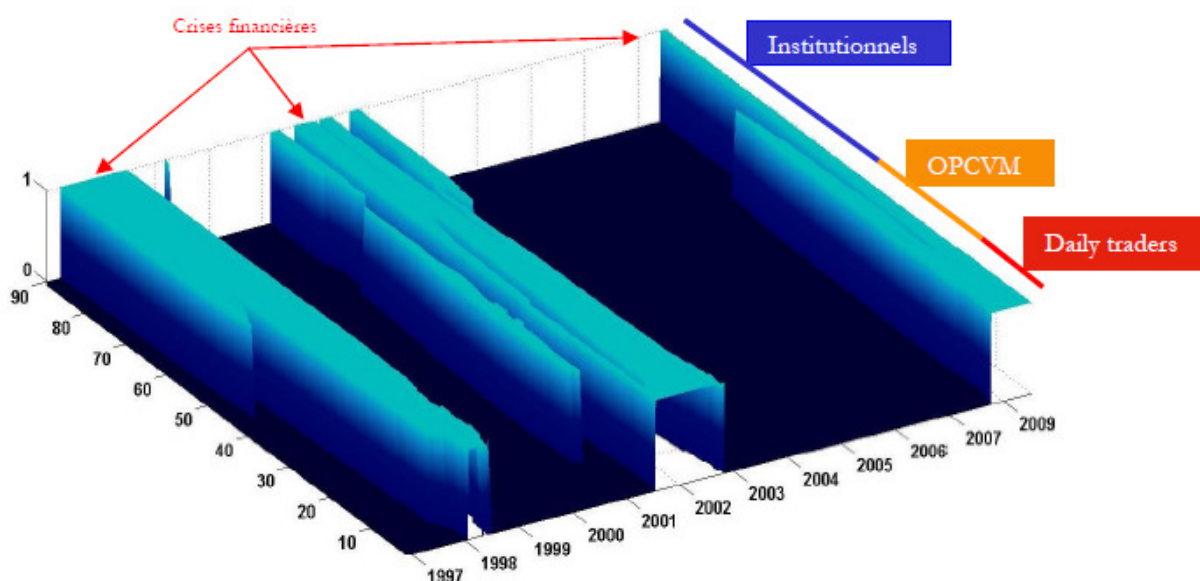


Source: Euronext. Données intra quotidiennes du CAC40 avec une fréquence d'échantillonnage de 30 minutes du 09/10/2008 au 13/11/2008. Le premier graphique représente le cours du CAC40 avec une fréquence de 30 minutes, le deuxième graphique représente le cours de clôture du CAC40 et le dernier représente le cours de clôture hebdomadaire du CAC40. Calculs effectués par les auteurs.

Ci-dessus, nous avons représenté l'évolution de l'indice CAC40 sur une période de un mois pour différents agents financiers opérant à différentes fréquences. On observe particulièrement bien qu'un agent qui agit toutes les 30 minutes est beaucoup plus exposé aux variations des cours qu'un investisseur qui intervient sur les marchés toutes les semaines.

En effet, un choc à court terme sur le marché aura beaucoup plus d'influence sur le *daily trader* qui opère à une fréquence intra-quotidienne voir journalière que sur un institutionnel qui agit à des fréquences beaucoup plus longues de l'ordre d'une semaine à un mois. Ainsi, ce fait stylisé montre qu'il est utile pour notre indicateur de caractérisation des crises financières d'intégrer l'hétérogénéité des agents financier. La figure 9 montre très bien l'influence de la crise du début des années 2000 sur des agents intervenant sur les marchés à différentes fréquences (30 minutes à 1 mois).

Figure 8 : Time-series Evolution of the CAC40 Return Volatility States
(0 if calm period, 1 if in the 90% extreme)



Source: *Bloomberg*. Daily CAC40 Index data from 01/01/1996 to 07/08/31/2009. This chart represents the volatility state in the y-axis, the frequency in the z-axis (1 day to three months) and time in the x-axis. Computations by the authors.

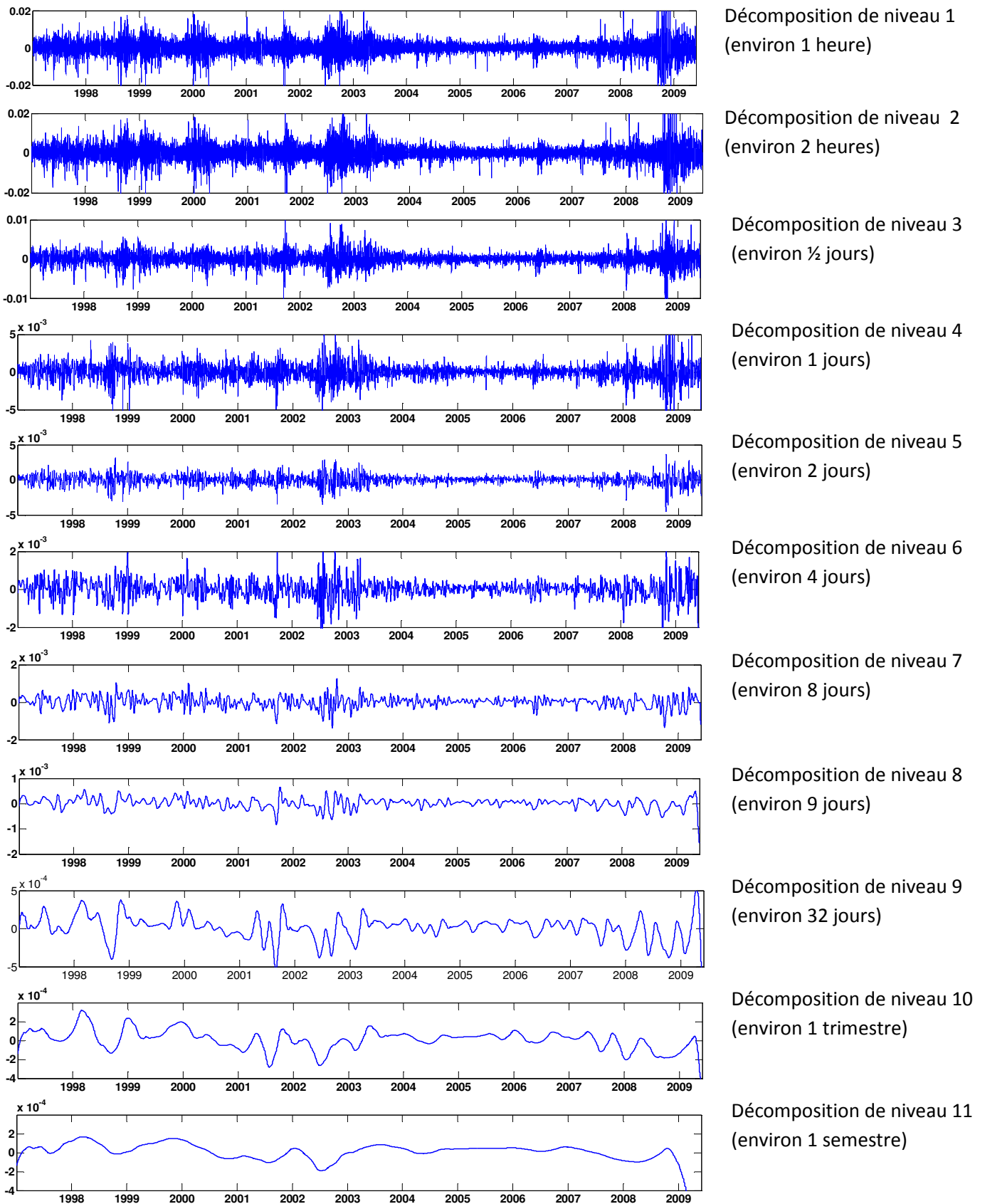
La figure 8 explique très bien l'évolution de la volatilité du CAC40 sur la période de 1997 à 2009. En effet, on observe facilement qu'une période de forte instabilité a eu lieu entre les années 2000 et 2003 et que tous les agents, quelque soit leur fréquence d'intervention, sont concernés par la crise. Les volatilités atteignent des extrêmes durant cette période. Comme nous l'avons mentionné en introduction, il est primordial que notre étude tienne compte du fait que les agents financiers agissent différemment sur les marchés.

3. APPLICATION DE LA METHODE DE DECOMPOSITION DES ONDETTES DISCRETES

L'idée de la méthode des ondelettes discrètes est la suivante : cette technique va nous permettre, tout d'abord, de décomposer la rentabilité à trente minutes du CAC40 sur la période d'étude en plusieurs signaux de rentabilité. Chaque composante représente alors la rentabilité selon une échelle de temps plus ou moins élevée. Après avoir décomposé notre série, nous reconstruisons, ensuite, les différentes trajectoires de nos rentabilités afin d'obtenir des séries de différentes échelles de temps mais de même taille. En voici, ci-dessous, l'illustration graphique de l'application de cette méthode des ondelettes discrètes sur une série de rentabilité à 30 minutes de l'indice boursier français.

Nous observons, sur la figure ci-dessous, facilement la décomposition de la volatilité en signaux de différentes fréquences. Chaque niveau de décomposition j , correspond à une fréquence égale à 2^j jours. Nous décomposons les rentabilités sur onze niveaux puis nous reconstruisons leur trajectoire. Nous obtenons donc des échelles de temps allant de 1 heure ($2^1 = 2$ observations) à environ 6 mois ($2^{11} = 2048$ données).

Figure 9: Evolution de quelques niveaux de décomposition des rendements du CAC40



Sources: Euronext, Données intra-quotidiennes du CAC40 avec une fréquence d'échantillonnage de 30 minutes. Nous représentons ci-dessus l'évolution de quelques niveaux de décompositions des rendements du CAC40 entre le 02/01/1997 et 29/03/2007. Calculs effectués par les auteurs.

4. APPLICATION DE L'ANALYSE EN COMPOSANTES INDEPENDANTES (ACI)

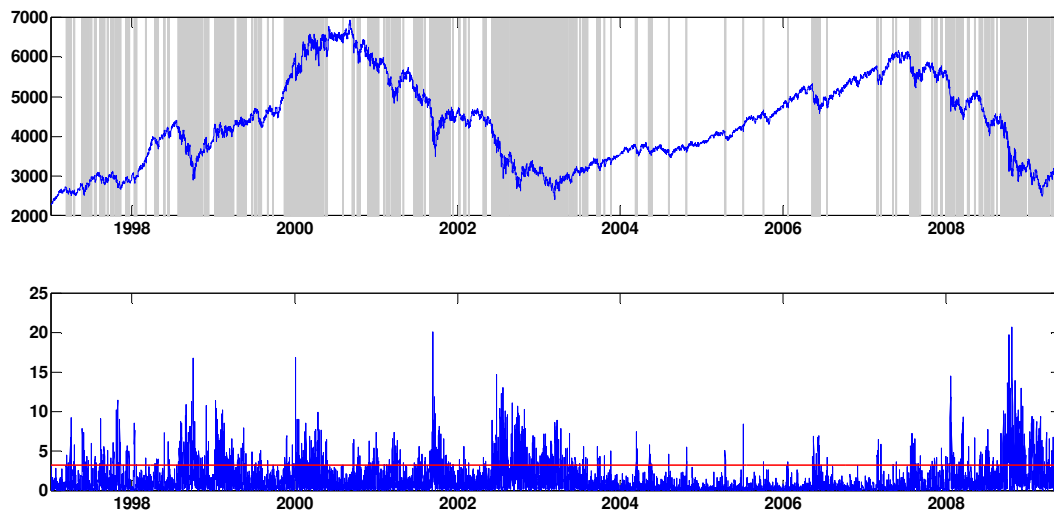
Dans le cadre de cette partie, nous souhaitons déterminer l'évolution du *WhIMS* à partir d'une ACI sur les signaux décomposés des rentabilités du CAC40. Afin de déterminer les composantes indépendantes, nous utilisons l'algorithme *FastICA* que nous avons introduit dans la présentation des méthodes statistiques utiles à notre étude. Comme l'ACP, l'algorithme permet d'extraire de nos données initiales, trois composantes indépendantes.

On remarque que l'évolution des composantes indépendantes est plus fine et donc plus sensible. Elles résument mieux les informations recueillies par les données initiales. Cette différence s'explique par le fait que le but principal de l'ACI est de fournir des composantes qui soient totalement décorréliées. Dans l'ACP, les composantes principales sont ordonnées en fonction de leur variance respective.

En revanche, dans l'ACI, on cherche à obtenir des composantes statiquement indépendantes. Une propriété importante de l'ACI vient du fait qu'elle permet de mieux prendre en compte, par rapport à l'ACP, la non normalité et la non linéarité des données ce qui est le cas pour les séries que nous traitons. De plus, l'ACP entraîne des pertes d'informations dues à la fréquence élevée de nos données et donc l'ACI est mieux appropriée pour traiter des séries temporelles à très haute fréquence. L'ACI permet également de dépasser le cadre traditionnel de l'analyse moyenne variance.

Puisque que nous possédons nos composantes indépendantes, la prochaine et dernière étape consistera à modéliser le *WhIMS* à partir de celles-ci. Pour cela, nous nous aidons de la formule (6). Ainsi, on obtient la figure suivante :

Figure 10 : Evolution du cours du CAC40 et du *Wavelet-heterogeneous Index of Market Shocks*



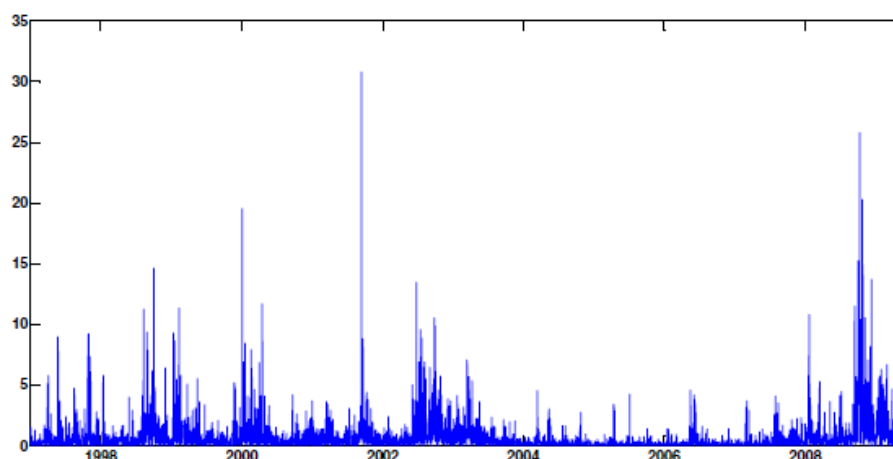
Sources: *Euronext*. Données simulées à partir des rendements intra quotidiens du CAC40 du 02/01/1997 au 02/06/2009 avec une fréquence d'échantillonnage de 30 minutes. Le premier graphique représente le cours du CAC40 (en bleu) et les crises en gris. Le graphique en dessous représente l'évolution du *WhIMS* appliqué au CAC40 (en bleu) et le quantile à 20% de la distribution du *WhIMS*. Calculs effectués par les auteurs.

La figure 10 illustre parfaitement le fait que le *WhIMS*, modélisé à l'aide d'une ACI sur les volatilités réalisées, réagit aux mouvements brutaux à la baisse du cours du CAC40. Dans un premier temps, le *WhIMS* illustre la crise asiatique démarrant en 1997 par des valeurs élevées. De même, la période de 2000 à 2003 est une période agitée dans la mesure où le *WhIMS* atteint des sommets durant cette période. Le seuil de déclaration d'une crise est toujours fixé arbitrairement à 3 en suivant l'approche de Maillet et Michel (2003, 2005).

La figure 10 montre également que durant la crise des valeurs technologiques de 2001 à 2003, ce seuil est très souvent dépassé. Le pic est atteint en Septembre 2001 avec une valeur du *WhIMS* qui dépasse la valeur de 18 sur l'échelle de crise. Le *WhIMS* permet également de détecter les périodes relativement calmes notamment après 2003 avant de signaler un léger regain de turbulences en 2006. Cela montre que le *WhIMS* modélisé à l'aide d'une ICA rend bien compte des phénomènes de crise. Cependant, on observe que le *WhIMS* calculé à partir des composantes indépendantes est plus sensible aux variations de cours ce que l'on remarque particulièrement dans les périodes relativement stables. Le *WhIMS* (*Wavelet-heterogeneous Index of Market Shocks*) est un indicateur mesurant l'intensité des chocs sur les marchés. Sa construction repose sur une combinaison de deux méthodes : une analyse en ondelettes et une analyse factorielle. La volatilité est décomposée selon la méthode des ondelettes, elle permet d'obtenir plusieurs signaux de volatilité à différentes échelles de temps.

L'analyse factorielle permet ensuite de synthétiser l'information fournie par ces signaux en composantes indépendantes et d'ébruitées. Pour calculer cet indicateur nous prenons comme référence l'indice du CAC40. Pour obtenir un « bon » indicateur de crises nous considérons donc le *WhIMS* appliqué au CAC40. Nous pouvons en donner la représentation suivante.

Figure 11 : Représentation du WhIMS sur la série du CAC 40

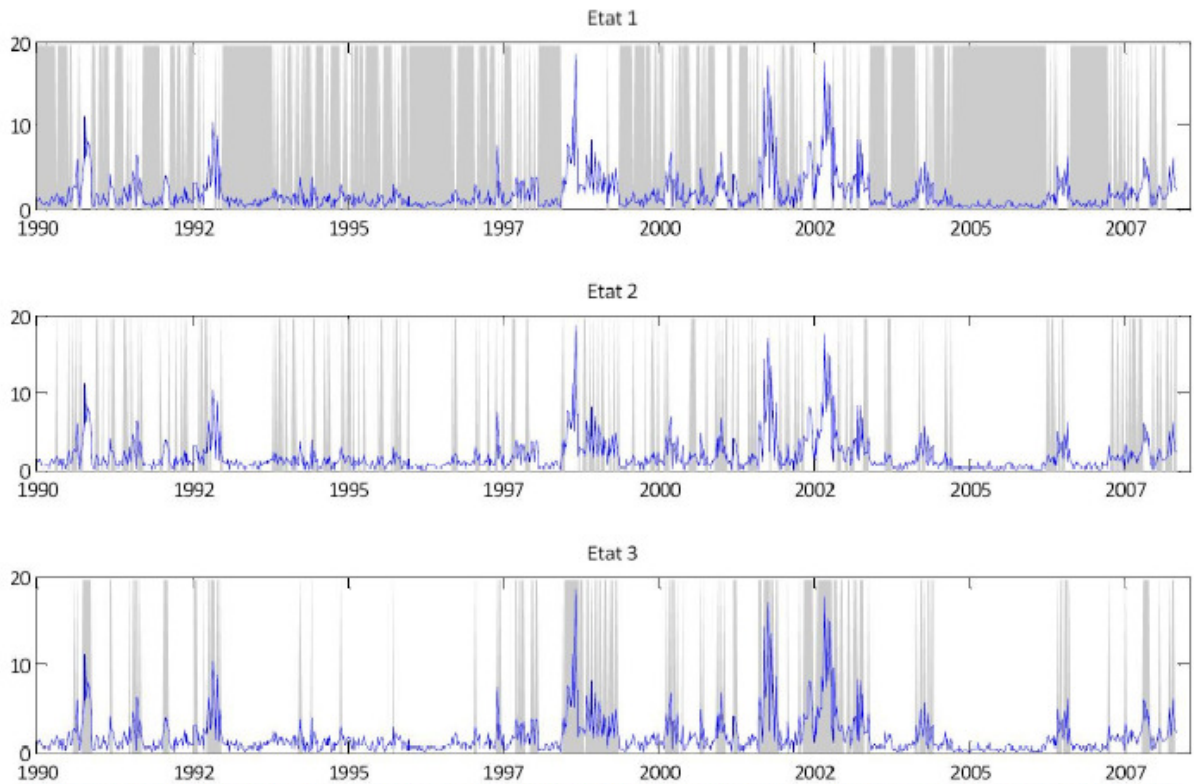


Sources : d'après le calcul des auteurs, série calculée sur le CAC 40 (*Euronext*) sur une période allant du 2 janvier 1997 au 2 juin 2009-

Cette série nous représente bien des périodes de hausse de la volatilité lors des principales crises financières (la crise asiatique en 1998, l'effondrement des tours du World Trade Center en septembre 2001, l'explosion de la bulle Internet en 2002, etc). Cependant une limite peut être apportée à cet indicateur quant à sa construction. En effet, celui-ci est calculé de manière statique, ainsi il connaît déjà les événements du futur lorsqu'il modélise l'état de turbulence des marchés. A présent nous tentons de modéliser l'existence d'états cachés dans cette série du *WhIMS*. Notre objectif étant de distinguer trois phases de marché, nous fixerons le nombre d'experts à entraîner à trois. Ces trois experts vont prendre en entrée différentes séquences de la série et ajuster leurs paramètres pour en donner la meilleure prévision sur leurs segments respectifs.

La chaîne de Markov cachée prendra ensuite les différentes erreurs de prévisions associées à chaque expert pour déterminer une segmentation de la série en trois états, en réalité elle détermine la probabilité de chacun des perceptrons. Comme nous le verrons par la suite, si la chaîne de Markov cachée détecte clairement des phases de marché, nous pourrions observer les différentes tendances du marché sur les rendements cumulés du CAC40 selon les états identifiés.

Figure 12 : Représentation du WhIMS sur la série du CAC 40



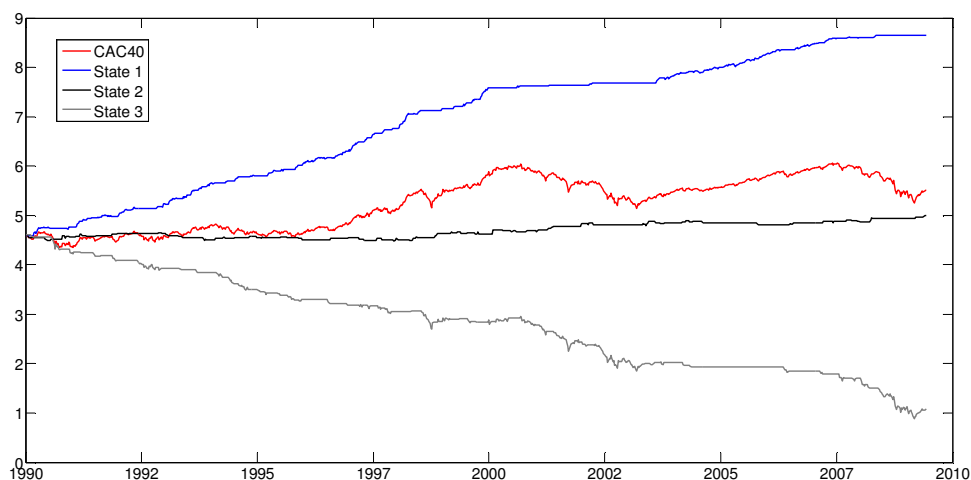
Sources : d'après le calcul des auteurs, série calculée sur le CAC 40 (*Bloomberg*) sur une période allant du 1er janvier 1990 au 30 avril 2008. Les surfaces grisées indiquent que la série se situe dans l'état mentionné dans le titre.

On peut constater que le premier état regroupe les périodes d'assez faible volatilité. En revanche, le troisième état intègre des états de forte volatilité, chaque « pic » de volatilité est repéré par cet état. Le deuxième état est difficilement interprétable, il regroupe tous les cas qui ne sont pas considérés dans les premiers et troisièmes états. Cet état, en quelques sortes transitionnel, permet de mieux caractériser les deux autres états. La matrice de transition associée à ce modèle est la suivante :

$$\hat{A}_{WhIMS} = \begin{pmatrix} 0,91 & 0,06 & 0,03 \\ 0,02 & 0,83 & 0,15 \\ 0,02 & 0,13 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Afin de visualiser ces états de marché nous pouvons représenter l'indice du CAC40 selon ces différents états. Pour cela nous construisons les trois séries de rendements cumulés conditionnels à chaque état (à chaque date, si le rendement du CAC40 est dans un état donné, la série du CAC40 associée à cet état aura le même rendement, sinon le rendement à cet instant sera nul).

Figure 7 : Performances cumulées du CAC40 pour différents états de marches



Source: *Euronext*, Données hebdomadaires du CAC40 entre le 01/01/1990 et le 11/06/2009. "State 1" ("State 2". "State 3") correspondent aux performances cumulées correspond to a series of cumulated returns (base 100 le 01/01/1990) quand le *WhIMS* et les probabilités d'experts sont classés dans le premier (second et troisième) cluster d'une division en trois categories (échelle semi-logarithmic). Calculs effectués par les auteurs.

On observe que le premier état conduit à une forte croissance du cours du CAC40 (+75% sur toute la période alors que le CAC40 connaît une croissance de 148% sur cette même période). Cet état avait précédemment été caractérisé par des périodes de faible volatilité. En revanche, le troisième état qui faisait l'objet de forte volatilité sur le marché, conduit à une diminution du cours de plus de 78% sur toute la période. L'état transitionnel connaît lui une légère augmentation de 34% sur les 20 ans. Il se dessine ici une stratégie d'investissement conditionnelle à l'état de marché. En effet, comme on peut le remarquer, si l'on investit dans l'indice CAC40 dès que l'état du marché est caractérisé par une faible volatilité, on peut réaliser un gain important.

Cependant, la caractérisation de ses états dépend de la survenance de crises financières qui sont par essence même imprévisibles. Si l'investisseur sait déterminer l'état dans lequel le marché se trouve à l'instant t , il peut décider d'un investissement en $t+1$. Cette stratégie obtient des résultats comparables à celle présentée ci-dessus qui présentait l'inconvénient de devoir connaître en $t - 1$ l'état qu'aurait le marché en t pour pouvoir prendre une décision. A présent que les différents régimes du marché ont été identifiés, nous allons déterminer si cette segmentation permet d'obtenir de meilleurs résultats de prévision. Pour cela nous entraînons un réseau de neurones sur la série entière du CAC40 d'une part.

D'autre part, nous utilisons cette identification des états pour entraîner un perceptron sur chaque segment. Trois perceptrons sont donc construits et optimisés chacun sur leurs périodes. Chacun des perceptrons donne une prévision pour chaque observation appartenant à l'état sur lequel il a été entraîné. En combinant ces prévisions, on obtient les résultats suivants.

**Table 3: Comparisons between Market Characterizations based on a HMM-MLP
Modelling of the *WhIMS*, *IMS*, *VIX* and Volatility**

		Frequency	Return	Volatility	Sharpe ratio	Up	Large Down
All States	CAC40	100.00	4.80	20.41	0.23	52.56	9.96
State 1	WHIMS	43.20	61.30	12.57	4.87	68.72	0.46
	IMS	63.31	11.92	15.92	0.74	54.21	6.39
	VIX	35.21	19.03	14.24	1.33	58.82	5.04
	Volatility	33.33	3.06	12.55	0.23	51.78	3.25
State 2	WHIMS	16.37	13.13	15.92	0.82	50.60	3.01
	IMS	18.93	-15.96	20.72	-0.77	46.88	13.02
	VIX	20.81	5.10	15.24	0.33	52.61	5.21
	Volatility	16.67	31.18	17.48	1.78	59.76	7.69
State 3	WHIMS	40.43	-36.17	25.97	-1.40	36.10	22.93
	IMS	17.75	4.87	31.28	0.15	52.78	19.44
	VIX	43.98	-5.49	25.92	-0.21	47.53	16.14
	Volatility	50.00	-1.68	24.97	-0.07	50.69	15.19

Source: *Bloomberg*. Weekly CAC40 Index data between January 1st. 1990 and June 11th. 2009. Computations by the authors. The *IMS* corresponds to the Index of Market Shocks (Maillet and Michel, 2003), the *WhIMS* to the Wavelet-heterogeneous Index of Market Shocks, and the Volatility corresponds to the one-year daily annualized volatility of returns on the CAC40. The *VIX* is an aggregate measure of the implied volatility of a wide range of S&P 500 options. All figures – except Sharpe ratios – are expressed in percentages. The column “State” indicates the regime issued from the classification. Frequency represents the percentage of periods in each corresponding state. Mean and volatility represent annualized first and second central conventional moments of the conditional return in the various states. The Sharpe ratio is calculated by subtracting the risk free rate (Eonia) from the rate of return on the portfolio and dividing by the standard deviation of the portfolio returns. Up (Large down) indicates the frequency of positive (large negative) returns in each state conditional samples.

Dans ce tableau, nous avons représenté différentes mesures de turbulences, le *WhIMS*, l'*IMS*, le *ViX* et la volatilité. Les états mis en évidence par le *WhIMS* sont issus d'une classification de Kohonen opérant sur le *WhIMS* et les probabilités d'appartenance à un état obtenues par le réseau de neurones. On observe donc que le *WhIMS* surperforme toute les autres mesures.

En effet, on obtient une bonne séparation des états du marché. Un état de hausse (state 1) du marché marqué par des rendements très importants, un ratio de Sharpe élevé et un taux de croissance enregistré largement supérieur aux autres mesures. Il est a noté un faible taux de baisse qui est quasi nul. De même, l'état 3 (state 3), montre une bonne distinction de l'état de crise caractérisé par un rendement et un ratio de Sharpe très négatif, un faible taux de croissance et un nombre important de chutes des marchés enregistrés.

PARTIE II :
LE CRITERE DE TRACKING ERROR DANS LA GESTION ACTIVE

Nous souhaitons mesurer l'effet du contrôle de risques sur les performances futures, et plus précisément l'effet d'un modèle de contrôle du risque sur la distribution des performances futures.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un critère de risque fréquemment utilisé par les *Asset Managers* : la *tracking error*.

Il existe des fonds dont la gestion se réfère explicitement à un *benchmark* (étalon), c'est-à-dire à un indice ou à un portefeuille (de titres ou d'indices) dont le gestionnaire doit reproduire la performance et, si possible, l'améliorer. Il convient donc de définir un *benchmark* et le type de gestion choisie pour notre étude.

Nous définissons dans un premier point les notions de benchmark et de gestion active. Nous présentons dans un deuxième point le modèle de stratégie d'investissement du gérant qui nous permet de modéliser notre gestion active. Puis nous détaillons les différents modèles utilisés pour la simulation de l'indice de référence. Nous considérons différents modèles afin de voir dans quelle mesure le modèle de diffusion de l'indice de référence impacte nos mesures de performance et oriente notre conclusion concernant l'effet du contrôle des risques. Afin de juger de la performance de notre gérant et de quantifier l'impact du plafond de *tracking error* sur celle-ci, nous utilisons différentes mesures de performance que nous décrivons et analysons. Nous concluons ainsi sur l'effet du contrôle des risques dans la gestion active.

I. GESTION ACTIVE ET BENCHMARK

La référence d'évaluation est indispensable à la fois pour l'investisseur et le gérant qui recherchent le moyen commode et indiscutable de porter un jugement quantitatif et qualitatif sur la gestion. La mesure de performance suppose qu'il existe une référence à laquelle tout investisseur et tout gérant peut se comparer quel que soit l'objectif de gestion qui lui est assigné. Nous définissons cette référence et ses caractéristiques dans cette partie.

1. LA DEFINITION DU BENCHMARK

Aftalion et Poncet (1991) soulignent l'importance de la référence de calcul en remettant en cause les mesures de performance établies sur des indices qui ne représentent pas les objectifs de gestion. Sharpe (1992) donne les caractéristiques d'une bonne référence de calcul qui doit :

1. être une alternative viable. L'interprétation de ce qualificatif doit être entendue comme durable au fil des ans et non susceptible d'être atteint par des seuls effets de mode.
2. ne pas être battu trop facilement.
3. être d'un coût très faible à calculer et à suivre
4. être connu avant l'événement.

Tazé-Bernard et Laguiche (1996) donnent un objectif aux benchmarks : " Le Benchmark sert ainsi à expliquer la politique d'investissement menée, et les résultats de cette politique, en quantifiant les différentes positions prises par le gérant et leur apport à la performance obtenue".

Les auteurs font précéder cette définition de la remarque qu'il convient de privilégier les valeurs relatives aux valeurs absolues et qu'il convient de connaître les contraintes de l'investisseur car " Un malentendu sur le niveau de risque du portefeuille peut entraîner des tensions dans la relation commerciale en cas de fluctuations importantes des marchés ".

Ils définissent ensuite le benchmark non comme un indice de rentabilité de marché mais comme un panier de produits concurrents ayant les mêmes objectifs de gestion que ceux qui sont souhaités par le client.

Ils précisent que le niveau de *tracking error* doit être défini avec le client. Ils notent enfin que le benchmark dont la composition est précise ne peut constituer une liste de recommandation d'investissement. La condition 4 de Sharpe n'est donc pas inutile.

A notre sens, un bon benchmark doit faire l'objet d'une publication régulière. De ce point de vue, les différents indices de marché publiés quotidiennement dans la presse spécialisée ont le mérite d'exister même s'ils font parfois l'objet de critique quant à leur représentativité de tout ou partie de l'économie ; ce n'est pas leur objectif.

L'établissement de la meilleure référence possible pour un objectif de gestion donné fait d'autant plus l'objet de discussions que l'évaluation de la performance en dépend directement. Les conséquences éventuelles conduisent à adopter une attitude prudente dans le choix de mesure d'étalonnage.

2. LA GESTION ACTIVE

Comme nous l'avons vu, l'évaluation de la performance d'un portefeuille entraîne une comparaison avec un benchmark qui n'est pas universel en raison de la diversité des objectifs de gestion. Ces divers objectifs entraînent la création d'autant de styles de gestion.

En amont du style de gestion, il convient d'opposer la gestion passive à la gestion active. La gestion passive est définie comme la gestion indicielle qui consiste à dupliquer un benchmark en conservant le coefficient bêta le plus proche possible de 1. Cela vise à dupliquer le *benchmark* aussi fidèlement que possible. Par opposition, la gestion active laisse une latitude plus grande et parie sur l'aptitude du gérant à battre l'indice.

L'objectif de la gestion active est d'obtenir une rentabilité supérieure à celle du marché ou du compartiment de marché suivi spécialement par le gestionnaire. Il s'agit d'un travail d'équipe réunissant les analystes de données macroéconomiques dont l'objectif consiste à désigner les secteurs porteurs et ceux qui le sont moins : faut-il privilégier le secteur des matières premières ou l'automobile, l'or ou la détention d'obligations ?

Les analystes des valeurs de chaque secteur évaluent les entreprises et essaient de détecter au travers des résultats trimestriels les situations qui permettent les arbitrages. Les gérants

mettent alors leur savoir faire en jeu en utilisant les recommandations des uns et des autres sans compter le consensus de marché et l'analyse technique.

II. LA TRACKING ERROR : UN CRITERE DE RISQUE POUR LA GESTION DE FONDS

1. DEFINITION DE LA TRACKING ERROR

La *tracking error* est un indicateur qui s'utilise dans l'analyse des fonds « benchmarkés ». La gestion « benchmarkée » consiste à construire des portefeuilles de même niveau de risque qu'un indice, ou portefeuille choisi comme *benchmark*, tout en laissant au gérant la possibilité de s'écarter de la composition du *benchmark*, dans le but d'obtenir une rentabilité supérieure. Ceci suppose que le gérant possède une habileté particulière en matière de sélection d'actifs. La *tracking error* permet alors de mesurer les écarts de risque entre le portefeuille géré et le portefeuille de *benchmark*. Elle est définie par l'écart-type de la différence de rentabilité entre le portefeuille et le *benchmark* qu'il réplique. On note TE_t la *tracking error* à l'instant t , on s'intéresse au carré de la *tracking error*, soit :

$$TE_t^2 = \mathbb{E}_P \left[(R_{t,P} - R_{t,B})^2 | \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}_P [(R_{t,P} - R_{t,B}) | \mathcal{F}_t]^2 \quad (33)$$

Où $R_{t,P}$ et $R_{t,B}$ sont des variables aléatoires désignant respectivement le rendement du portefeuille et le rendement du *benchmark* à l'instant t .

TE_t , $R_{t,P}$ et $R_{t,B}$ sont des processus stochastiques définis sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) muni de la filtration \mathcal{F}_t pour $0 \leq t \leq T$.

TE_t^2 est inconnue et doit être estimée. A chaque instant t il y a une réalisation observable de la différence $R_{t,P} - R_{t,B}$, pour estimer TE_t^2 nous utilisons la série chronologique des écarts de rentabilités. Nous faisons l'hypothèse que dans l'intervalle d'estimation que les différences $R_{t,P} - R_{t,B}$ sont indépendantes et identiquement distribuées de telle sorte que toutes les réalisations, notées $r_{t,P} - r_{t,B}$, peuvent être utilisées pour estimer TE^2 .

Cette hypothèse revient à supposer que la *tracking error* future (ou *ex ante*) est indépendante du temps et qu'on peut l'estimer par la *tracking error* constatée (ou *ex post*) :

$$TE^2 = \mathbb{E}_P [(R_P - R_B)^2] - \mathbb{E}_P [R_P - R_B]^2 \quad (34)$$

Où R_P et R_B sont des variables aléatoires avec $r_{t,P} - r_{t,B}$ leurs réalisations respectives à un instant t .

2. ESTIMATION DE LA TRACKING ERROR

Un estimateur de la *tracking error ex ante* est la *tracking error ex post* calculée sur l'historique des rentabilités observées :

$$TE_{ex\ post} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N ((r_{t,P} - r_{t,B}) - \bar{r})^2} \quad (35)$$

Avec :

N : le nombre d'observations,

$r_{t,P}$: la rentabilité du portefeuille observée à l'instant t ,

$r_{t,B}$: la rentabilité du *benchmark* observée à l'instant t ,

\bar{r} : est la moyenne des écarts de rentabilités entre le portefeuille et son *benchmark*, soit

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_{t,P} - r_{t,B}) \quad (36)$$

La *tracking error* n'est pas indépendante de la volatilité du *benchmark*. Elle dépend aussi bien du comportement du gestionnaire (exposition au marché, sélection des titres, ...) que du risque lié aux variations de l'indice de référence.

De manière classique, la rentabilité du portefeuille R_P peut s'exprimer par le modèle linéaire suivant :

$$R_P = \alpha + \beta \cdot R_B + \varepsilon \quad (37)$$

avec $\mathbb{E}_P[\varepsilon] = 0$, $\mathbb{E}_P[\varepsilon \cdot R_B] = 0$ et R_B la rentabilité du *benchmark*.

L'écart de rentabilité entre le portefeuille et le *benchmark* est:

$$R_P - R_B = \alpha + (\beta - 1) \cdot R_B + \varepsilon = (\beta - 1) \cdot R_B + \varepsilon^* \quad (38)$$

avec $\mathbb{E}_P[\varepsilon^*] = \alpha$ et $\mathbb{E}_P[R_B \cdot \varepsilon^*] = 0$.

La *tracking error* s'exprime alors simplement :

$$TE^2 = \mathbb{E}_P[(R_P - R_B)^2] - \mathbb{E}_P[R_P - R_B]^2 = (\beta - 1)^2 \cdot var(R_B) + var(\varepsilon) \quad (39)$$

III. MODELE DE SIMULATION DE LA STRATEGIE D'INVESTISSEMENT DU GERANT

1. EXPRESSION DE LA TRACKING ERROR

Nous considérons un cas particulier simple de gestion du fonds. Le gérant ne va agir que sur son exposition au *benchmark*, la *tracking error* s'exprime alors comme suit :

$$TE = |1 - \beta| \cdot \sigma(R_B) \quad (40)$$

La *tracking error ex post* est calculée chaque semaine sur un historique glissant de 3 mois.

2. HYPOTHESE SUR LA STRATEGIE D'INVESTISSEMENT DU GERANT

Chaque semaine le gérant adapte son exposition en tenant compte d'une **prévision du cours du benchmark à 3 ans**. Si la prévision du cours du *benchmark* à 3 ans est supérieure au cours du benchmark au moment du réinvestissement, le gérant augmentera son exposition ($\beta > 1$) et dans le cas contraire il diminuera son exposition ($\beta < 1$).

Par hypothèse, le gérant modifie son exposition au benchmark en saturant son critère de risque. La *tracking error ex ante* s'exprime comme suit :

$$TE_{ex\ ante} = |1 - \beta| \cdot \sigma_{ex\ post}(R_B) \quad (41)$$

Avec

$\sigma_{ex\ post}(R_B)$: la volatilité historique du benchmark calculée sur l'historique des 3 derniers mois.

$$\sigma_{ex\ post}(R_B) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (r_{t,B} - \bar{r}_B)^2} \quad (42)$$

Où :

N, le nombre d'observation est de 3 mois.

\bar{r}_B , la rentabilité moyenne du benchmark constatée sur 3 mois. L'hypothèse centrale du contrôle des risques est que la *tracking error* calculée est un estimateur sans « biais » de la *tracking error* future. Autrement dit, la *tracking error ex ante* (pour les 3 mois qui viennent) est égale à la *tracking error ex post* (des 3 mois passés).

Le contrôle des risques fixe un plafond de *tracking error ex ante* que le gérant ne peut dépasser, noté TE_{Lim} . Nous obtenons la relation suivante :

$$TE_{ex\ ante} \leq TE_{Lim} \quad (43)$$

Compte tenu du comportement supposé du gérant, nous avons :

$$\beta_{min} \leq \beta \leq \beta_{max} \quad (44)$$

Avec

$$\begin{cases} \beta_{min} = 1 - \frac{TE_{Lim}}{\sigma_{ex\ post}(R_B)} \\ \beta_{max} = 1 + \frac{TE_{Lim}}{\sigma_{ex\ post}(R_B)} \end{cases}$$

Si l'anticipation à 3 ans du gérant est une hausse du cours du *benchmark*, alors $\beta > 1$ et nous avons $\beta = \beta_{max}$.

Si l'anticipation du gérant est une chute du cours du *benchmark*, alors $\beta < 1$ et nous avons $\beta = \beta_{min}$.

Il est important d'estimer le niveau de volatilité $\sigma(R_B)$ pour déterminer l'exposition du gérant au benchmark. Celle-ci est estimée par la volatilité *ex post*. Nous remarquons que si le niveau de volatilité augmente d'une semaine à l'autre l'intervalle encadrant l'exposition du gérant se resserre, contraignant celui-ci à réduire son β .

La contrainte de risque va obliger le gérant à modifier son exposition au benchmark, ainsi il ne pourra pas bénéficier du rebond du marché qu'il avait anticipé.

Afin de mesurer l'effet du critère de risque sur la distribution des performances à horizon 1 an, il convient de définir un modèle de diffusion de notre indice de référence (*benchmark*).

Dans la section qui suit nous présentons les différents modèles de diffusion utilisés pour simuler le cours de l'indice de référence.

IV. MODELISATION STOCHASTIQUE DE L'INDICE DE REFERENCE

Nous décrivons dans cette partie, les méthodes permettant la simulation de l'indice de référence. Pour cela nous nous basons sur différents modèles de diffusion et sur la méthode de Monte Carlo.

1. LA METHODE DE MONTE CARLO

Le problème de la simulation se pose de la façon suivante. Nous nous donnons une variable aléatoire $\mu(dx)$ et nous cherchons à réaliser informatiquement une suite de tirages X_1, \dots, X_n, \dots à priori infinie telle que les X_n suivent la loi $\mu(dx)$ et que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes. Si ces hypothèses sont satisfaites, nous pouvons appliquer la loi forte des grands nombres pour affirmer que, si f est une fonction μ -intégrable :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} f(X_n) = \int f(x) \mu(dx) \quad (45)$$

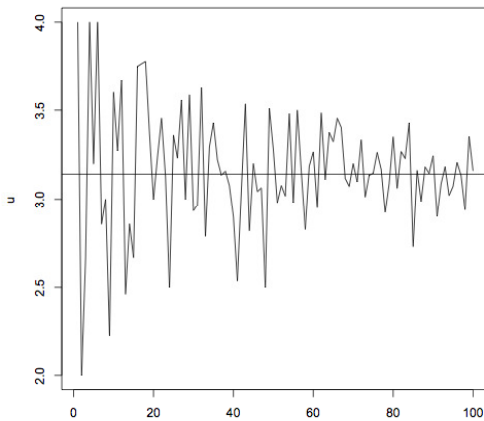
Pour implémenter cette méthode, nous procédons de la façon suivante. Nous supposons que l'on sait construire une suite de nombre $(U_n)_{n \geq 1}$ qui réalise une suite de variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0,1]$, indépendantes, et on cherche une fonction $F(U_1, \dots, U_p)$ soit la loi cherchée $\mu(dx)$. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ où $X_n = F(U_{(n-1)p+1}, \dots, U_{np})$ est alors une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi μ .

Sous réserve que $E[|X|^2]$ soit fini on peut alors estimer les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire X .

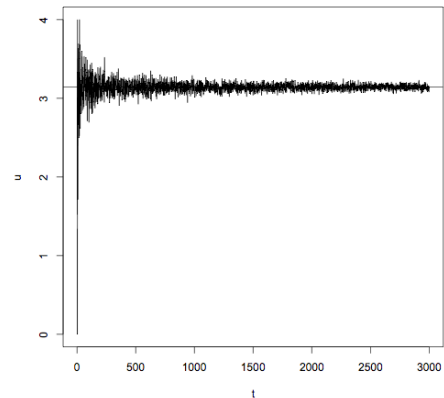
La méthode de Monte Carlo fait intervenir deux facteurs :

- le nombre de simulations à réaliser,
- le tirage de nombres aléatoires.

Les graphiques suivants montrent que plus le nombre de simulations augmente, meilleure est la convergence.



Méthode de Monte Carlo avec 100 simulations



Méthode de Monte Carlo avec 3 000 simulations

Pendant, on se retrouve face à des contraintes informatiques : plus le nombre de simulations est important plus le temps de calcul est long. Il s'agit donc de trouver un compromis entre le nombre de simulations à réaliser et le temps de calcul afin d'avoir la meilleure approximation possible.

2. LA GENERATION DE MOUVEMENTS BROWNIENS

2.1. LE PRINCIPE

Les modèles stochastiques utilisés dans la suite pour la projection des différents indicateurs nécessitent la génération de trajectoire de mouvements browniens.

Le mouvement brownien (B_t) est tel que $(B_t - B_{t-1})$ suit une loi normale centrée de variance σ^2 . Cela correspond aussi au produit de σ avec une variable aléatoire X_t suivant une loi normale centrée réduite.

Dans un premier temps, des nombres aléatoires U sont simulés suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Ensuite, l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale permet d'obtenir la valeur de la variable normale centrée réduite X_t :

$$X_t = N^{-1}(U) \text{ avec } N(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

2.2. LA GENERATION DE NOMBRES ALEATOIRES

Comme rappelé dans la description de la méthode de Monte Carlo, la génération des trajectoires passe nécessairement par la génération de nombres aléatoires. De manière pratique, il s'agit de générer des réalisations de variable aléatoire de loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

Il existe deux grands types d'algorithmes qui permettent de générer des nombres aléatoires de lois uniformes :

- les générateurs pseudo-aléatoires (ex : la fonction Rnd d'Excel),
- les générateurs quasi-aléatoires (ex : l'algorithme du Tore).

A ces deux familles, s'ajoutent des générateurs mixtes comme le Tore mélangé : les nombres aléatoires simulés par ce dernier sont obtenus en mélangeant par un générateur pseudo-aléatoire les valeurs obtenues à l'aide d'un générateur quasi aléatoire.

Nous nous sommes fondés sur l'ouvrage Modèles financiers en assurance rédigé par Frédéric Planchet, Pierre Thérond et Julien Jacquemin et notamment sur l'analyse faite dans la partie « générer des nombres aléatoires ». Nous avons donc choisi de générer les variables aléatoires à l'aide de l'algorithme du « Tore mélangé » que l'on rappelle ci-dessous.

On génère une suite de nombres aléatoires uniformes (U_n) grâce au nombre premier p . Le nombre U_n est défini comme suit :

$$U_n = n \times \sqrt{p} - [n \times \sqrt{p}]$$

où $[]$ désigne l'opérateur partie entière.

L'algorithme du Tore mélangé consiste à prendre au $n^{\text{ième}}$ tirage la valeur U_m , au lieu de U_n , avec m une fonction d'une variable aléatoire uniforme :

$$U_m = U_{\varphi(n)}$$

$$\varphi(n) = [\alpha \times n \times \tilde{u} + 1]$$

Où :

- $[.]$ désigne l'opérateur partie entière
- $\alpha \geq 10$
- \tilde{u} est la réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme.

Le facteur α pour vocation de réduire le nombre de tirages qui donneraient lieu au même indice et donc au même nombre aléatoire. En effet, plus α est grand plus la probabilité de tirer deux fois le même nombre aléatoire est faible. Dans la pratique, $\alpha = 10$ est satisfaisant.

Pour la génération de \tilde{u} , nous avons retenu le générateur Rnd.

Pour la mise en œuvre de l'algorithme, nous avons choisi $p = 5$ et $\alpha = 10$.

V. LES PRINCIPAUX MODELES DE DIFFUSION DE L'INDICE DE REFERENCE

Nous présentons dans cette section les modèles de diffusion de l'indice de référence utilisés pour notre étude. Nous détaillons leurs implémentations et expliquons leurs avantages et leurs limites.

1. LE MODELE DE BLACK & SCHOLES

De nombreux modèles sont proposés pour représenter l'évolution du cours des actions et une littérature abondante est consacrée à ce sujet. Le modèle de référence est proposé par

Black et Scholes (1973) en considérant le mouvement brownien géométrique comme un processus décrivant les trajectoires des prix des actifs financiers.

Les hypothèses de ce modèle sont très restrictives :

- Il n'y a aucune restriction sur les ventes à découvert. Le produit de ces ventes est immédiatement et intégralement disponible.
- Il n'y a pas de frais de transactions ou d'impôts.
- Tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles.
- Il n'y a pas de dividende sur le sous-jacent pendant la durée de vie de l'actif dérivé.
- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.
- Le marché fonctionne en continu.

On suppose que la volatilité et l'espérance de rentabilité sont constantes au cours du temps. Le cours de l'indice de référence à un instant t est noté S_t .

La distribution du cours de l'indice de référence, représentée par un modèle de rendement normal utilisé dans le modèle de Black et Scholes, suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_S S_t dW_t^P$$

$$\Leftrightarrow d \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) dt + \sigma_S dW_t^P$$

$$\Leftrightarrow S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) t + \sigma_S W_t^P \right\}$$

Avec :

- S_0 : valeur initiale du cours de l'action,
- μ : espérance de rentabilité de l'action,
- σ_S : volatilité de l'action,
- W_t^P : mouvement brownien standard sous la probabilité historique P .

Le rendement espéré de l'action correspond au taux nominal sans risque, auquel nous ajoutons une prime de risque p qui reste par simplification constante au cours du temps :

$$\mu = r + p$$

$$\Rightarrow dS_t = (r + p)S_t dt + \sigma_S S_t dW_t^P$$

Le théorème de Girsanov permet de passer de l'univers réel à l'univers risque neutre en posant :

$$dW_t^Q = dW_t^P + \frac{p}{\sigma} dt$$

Avec :

- W_t^Q : un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre Q

➤ $\frac{p}{\sigma}$: prix de marché du risque.

En univers risque neutre, le rendement de tout actif correspond au taux sans risque, alors que dans le monde réel, ce rendement est égal au taux sans risque plus une prime de risque.

La dynamique du prix des actions est donc caractérisée pour chaque univers par un processus différent:

$$\text{Risque neutre} \quad d \ln S_t = \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) dt + \sigma_S dW_t^Q$$

$$\text{Monde réel} \quad d \ln S_t = \left(r + p - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) dt + \sigma_S dW_t^P$$

Ce modèle a l'avantage d'être simple et efficace. Cependant, un certain nombre d'observations empiriques contredisent les hypothèses de ce modèle : les prix sautent soudainement, la volatilité n'est pas constante au cours du temps et les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi normale.

2. LE MODELE A ELASTICITE CONSTANTE DE LA VARIANCE (CEV)

2.1. PRESENTATION DU MODELE CEV

Afin d'avoir un modèle de diffusion de l'indice de référence mieux adapté aux problématiques d'assurance qui sont souvent de longue durée, le modèle de diffusion de l'indice de référence est amélioré en rendant la volatilité variable avec le temps. Le modèle considéré est le modèle à élasticité constante de la variance ou modèle CEV (Constant Elasticity Volatility).

Sur les marchés européens, de manière historique il a été montré que lorsque le prix de l'action montait le comportement des agents sur le marché avait comme impact une baisse de la volatilité. Inversement lorsque le prix de l'action diminue, la volatilité augmente comme si le marchait s'affolait.

Le modèle CEV suppose ainsi que le cours de l'indice de référence est régi par le processus de diffusion suivant :

$$\text{Risque neutre} \quad d \ln S_t = \left(r - q - \frac{(\sigma_0 S_t^\beta)^2}{2} \right) dt + \sigma_0 S_t^\beta dW_t^Q$$

$$\text{Monde réel} \quad d \ln S_t = \left(r + p - q - \frac{(\sigma_0 S_t^\beta)^2}{2} \right) dt + \sigma_0 S_t^\beta dW_t^P$$

Avec :

- r est le taux nominal sans risque,
- q est le taux de dividende,
- W_t^Q et W_t^P sont deux mouvements browniens,
- σ est la volatilité,
- β une constante,
- P est la prime de risque.

Si $\beta < 0$ alors la volatilité s'accroît quand le cours diminue. Cela induit une distribution de probabilité compatible avec les observations sur les marchés d'actions, c'est-à-dire une queue de distribution plus épaisse à gauche qu'à droite.

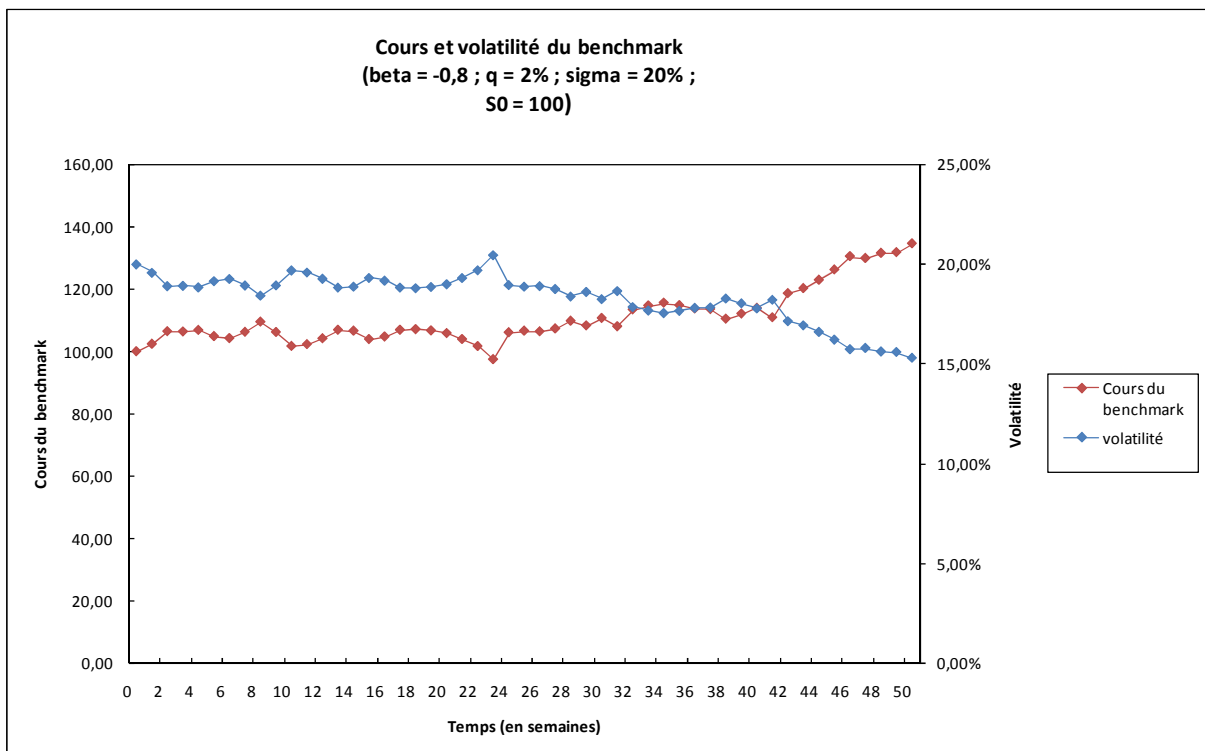
Quand $\beta > 0$, la volatilité augmente avec le prix de l'actif, induisant une distribution de probabilité avec une queue plus épaisse à droite.

2.2. LE CALIBRAGE

Les paramètres estimés selon la méthode des moments sont les suivants :

	S_0	q	σ_0	β	P
Risque Neutre	100	2%	14%	-0,8	-
Monde Réel	100	2%	20%	-0,8	5%

Le graphique suivant représente le cours de l'indice de référence ayant un prix initial de 100 et sa volatilité au cours des 50 prochaines semaines.



3. LE MODELE A CHANGEMENT D'ETATS : « REGIMES SWITCHING »

3.1. PRESENTATION DU MODELE « REGIME SWITCHING »

Un modèle « regime switching » permet d'introduire plusieurs états de la nature possibles (ici des situations boursières) dans la simulation de la rentabilité future d'une action.

Tel que résumé par Hardy (2001), des études empiriques identifient une faiblesse importante du modèle traditionnel de mouvement brownien géométrique ; le modèle ne parvient à capturer ni les mouvements les plus importants des prix des actions ni la variabilité stochastique du paramètre de volatilité. Le modèle de mouvement brownien géométrique sous-estime donc le risque inhérent au marché des actions. Une méthode simple de pallier le problème du paramètre de volatilité est de faire varier aléatoirement ce paramètre, celui-ci prenant un nombre déterminé K de valeurs discrètes.

La construction du modèle à changement de régime se base sur la prémisse que le marché des actions se comporte selon K états différents à travers le temps, ce que nous avons mis en évidence dans le chapitre précédant. En particulier, le modèle à changement de régime de Hardy (2001) comporte un processus log-normal du prix des actions qui se promène entre deux états. Le premier état est représenté par un marché des actions stable ayant une volatilité faible, et le deuxième état est représenté par un marché instable avec une forte volatilité. Le deuxième état surviendrait par exemple en période d'incertitude économique ou d'instabilité politique, et serait donc caractérisé par un rendement attendu plus faible que le premier.

Pour chacun des états, chacun des processus du cours de l'indice de référence est modélisé selon un modèle log-normal :

$$\eta_i(t) \equiv \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \sim N \left(\mu_S^{\text{état}_t}, \sigma_S^{\text{état}_t} \right) \quad (46)$$

Où :

S_t : le cours de l'indice de référence au temps t .

$\eta_i(t)$: le rendement logarithmique de l'indice de référence à l'instant t .

$\mu_S^{\text{état}_t}$: moyenne du rendement annuel de l'indice de référence dans l'état qui prévaut au temps t .

$\sigma_S^{\text{état}_t}$: volatilité du rendement annuel de l'indice de référence dans l'état qui prévaut au temps t .

A chaque temps t , l'état prend une valeur de 1 ou 2 selon un processus de Markov. Le passage d'un état de la nature à un autre est donc géré par une matrice de passage.

Si l'on suppose un modèle à deux régimes (ou deux états de la nature), cette matrice de passage s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Où $p_{i,j} = \Pr (p_{t+1} = j | p_t = i)$ est la probabilité que le marché se retrouve dans l'état j au temps $t + 1$ sachant que le marché était dans l'état i au temps t . Comme le processus de changement de régime est markovien, les probabilités ne dépendent que de l'état actuel et non de l'historique du processus.

Dans notre cas $i = 1$ caractérise le régime dit « Normal » et $i = 2$ le régime de « crise ».

3.2. LA MATRICE DE PASSAGE

Pour le calibrage de la matrice de passage nous utilisons l'étude faite au chapitre précédent que nous adaptons à deux états de la nature. En effet, nous supposons dans ce chapitre (pour des raisons simplificatrices) qu'il existe deux états de la nature :

- une situation boursière « normale » (numérotée 1) caractérisée par une volatilité des actions faible et une performance moyenne des actions importante
- une situation boursière de « crise » (numérotée 2) caractérisée par une volatilité des actions élevées et un rendement moyen des actions négatif

Nous estimons alors la matrice de transition avec un pas de temps journalier comme suit :

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 99,93\% & 0,07\% \\ 0,25\% & 99,75\% \end{pmatrix}$$

Connaissant la matrice de transition il est possible d'estimer la durée moyenne de rester dans un état.

Soit X_i le nombre de jours successifs passés dans l'état i . Par définition, X_i suit une loi géométrique de paramètre $1 - p_{ii}$ (qui est la probabilité de quitter l'état i à chaque pas de temps).

La probabilité de quitter l'état i dans n jours est :

$$P(X_i = n) = p_{ii}^{n-1} \times (1 - p_{ii})$$

L'espérance de X_i est alors égale à $\frac{1}{(1-p_{ii})}$.

L'espérance de la variable aléatoire X_i correspond à la durée moyenne de la situation boursière numérotée i .

Ainsi nous en déduisons que la durée moyenne en état de crise est d'environ 400 jours.

3.3. LA SITUATION BOURSIERE INITIALE

Le modèle « régime switching » gère la transition entre régimes à chaque pas de temps mais ne dit rien quant au régime de la date initiale.

Pour ne pas biaiser la simulation en fixant un régime initial, nous tirons aléatoirement le régime initial selon la probabilité de Markov invariante (la probabilité qui reste invariante par la matrice de transition P). Cette probabilité se calcule en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} = \pi_1 \\ \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} = \pi_2 \end{cases}$$

Nous obtenons une probabilité invariante pour l'état dit « Normal » de 78% et donc de 22% pour l'état de crise financière.

3.4. PARAMETRES DU MODELE DE DIFFUSION DE L'INDICE DE REFERENCE AU SEIN DE CHAQUE REGIME

Comme décrit précédemment, nous considérons que la rentabilité future de l'indice de référence est distribuée selon une loi normale dont les paramètres vont différer selon l'état boursier, traduisant ainsi les spécificités du régime. Pour le calibrage de ces modèles nous nous basons sur les données historiques du CAC40 et nous procédons de la façon suivante :

- Nous identifions sur l'historique les différentes phases (croissance ou crise).
- Nous trions les données historiques en fonction du régime auquel elles appartiennent.
- Nous calculons la moyenne et la volatilité des rendements dans chaque régime nous permettant d'estimer la tendance et la volatilité de nos lois normales en cas de crise et hors crise.

Dans une situation boursière « Normale », nous supposons que la rentabilité de l'indice de référence suit une loi normale de paramètres :

- Esperance de rentabilité annuelle : 13%
- Volatilité annuelle : 15%

Dans une situation boursière de « crise », nous supposons que la rentabilité de l'indice de référence suit une loi normale de paramètres :

- Espérance de rentabilité annuelle : -12%
- Volatilité annuelle : 27%

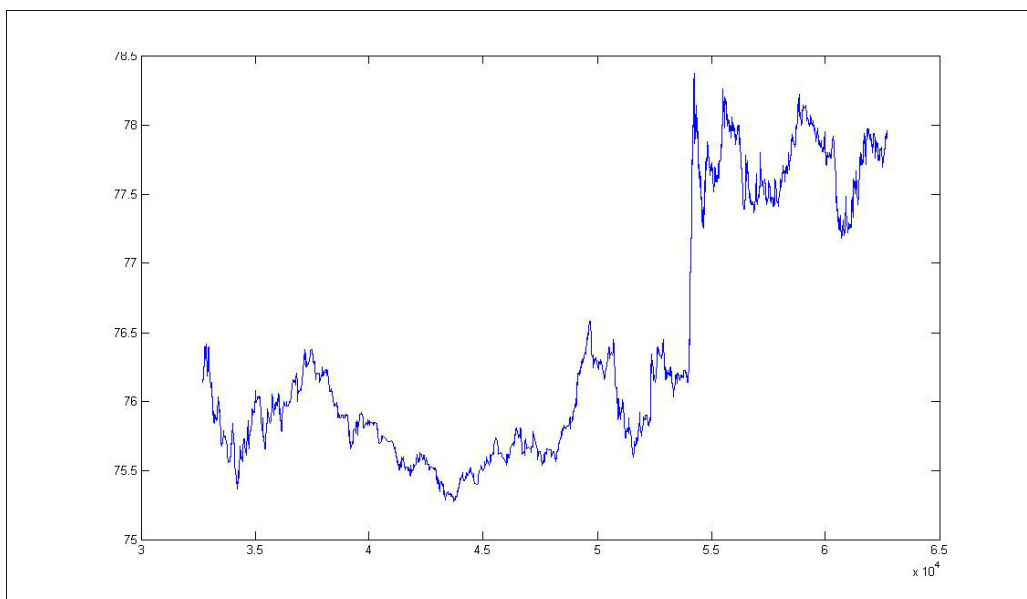
4. INTRODUCTION D'UN PROCESSUS A SAUTS DANS LE MODELE « REGIME SWITCHING »

4.1. PRESENTATION DU MODELE « REGIME SWITCHING A SAUTS »

Des modèles discontinus pour l'évaluation d'options ont été introduits pour la première fois en 1976 par Merton. Depuis, des centaines d'articles de recherche ont paru sur le sujet et l'intérêt des praticiens pour ces modèles est également de plus en plus grand.

Il existe plusieurs explications à cette popularité. Tout le monde s'accorde sur le fait que, dans beaucoup de situations, le modèle classique de Black et Scholes est trop simpliste pour reproduire les phénomènes observés sur le marché. Plusieurs méthodes ont donc été proposées pour généraliser ce modèle. Dans ce sens, les modèles à sauts s'inscrivent dans une liste de modèles qui ont pour vocation de remédier aux défauts du modèle de Black-Scholes. Nous pouvons citer à ce titre des modèles de volatilité locale (CEV) que nous avons décrit précédemment, ou de volatilité stochastique, le mouvement brownien fractionnaire ou encore des modèles multifractals. Les modèles à sauts ont pourtant un certain nombre d'avantages qui leur ont permis de prendre une place importante dans cette multitude d'outils de modélisation financière.

Commençons par l'argument le plus intuitif que l'on peut comprendre en regardant la figure ci-dessous, représentant une séance avec saut de l'action BNPP le 12/12/2008.



Un exemple de séance avec saut : BNPP le 12/12/2008

Nous voyons que le prix subit de temps en temps des changements importants comparés à la variation moyenne (il est naturel d'appeler ces larges mouvements des sauts). Donc, les sauts dans la dynamique des prix sont une réalité du marché et pas seulement un outil

mathématique. Il est évident qu'une dynamique de ce type ne peut pas être modélisée correctement par un processus aléatoire continu. En même temps, c'est à ces grands changements imprévisibles dans les prix qu'est associée la majeure partie des pertes liées à l'actif financier. Il est donc important de les prendre en compte pour une gestion efficace du risque.

De manière générale, comme il n'existe pas de modèle universel, le choix de tel ou tel modèle dépend de l'application visée. Dans notre contexte, l'utilisation des modèles discontinus est surtout justifiée par l'occurrence de sauts baissiers qui viennent épaissir la queue de distribution gauche des performances annuelles.

De plus, d'après les données, les queues de distribution des indices actions tel que le MSCI ou le CAC40, sont plus épaisses que celle d'une gaussienne autrement dit l'hypothèse de normalité des rendements n'est plus vraie dès lors que l'on s'intéresse aux événements extrêmes.

Afin de tenir compte de ces observations, nous optons pour l'introduction de sauts baissiers dans le modèle à changement d'état, tel que les rendements indépendants et identiquement distribués suivent des lois différentes en absence et en présence de sauts ainsi qu'en état de crise ou non.

On note $\eta_i(t)$ le rendement logarithmique de l'indice de référence à l'instant t .

Au sein de chaque régime ($i = 1$ et 2) à savoir le régime dit « normal » et de « crise », le rendement de l'indice de référence est modélisé de la façon suivante :

$$\eta_i(t) \equiv \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = (1-p) \cdot X_i(t) + p \cdot Y_i(t) \quad (47)$$

- p_i correspond à la fréquence de sauts pour le régime i
- X_i est une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(\mu_i^{HS}; \sigma_i^{HS})$ avec respectivement μ_i^{HS} et σ_i^{HS} le rendement annuelle moyen et la volatilité annuelle hors saut dans l'état i
- Y_i une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(\mu_i^S; \sigma_i^S)$ avec respectivement μ_i^S et σ_i^S le rendement annuelle moyen et la volatilité annuelle en cas de saut dans l'état i .

La transition d'un régime à l'autre est modélisée de la même manière que le modèle « régime switching » décrit à la section précédente. La seule modification réside dans l'introduction d'un processus à sauts et de la modification des lois propres à chaque régime en présence ou en absence de sauts.

4.2. CALIBRAGE DU MODELE

Le paramétrage du modèle par le maximum de vraisemblance est complexe puisqu'il s'agit d'un problème d'optimisation à 5 inconnues pour chaque régime boursier. Nous avons comme paramètres : la moyenne μ_i^{HS} et la volatilité σ_i^{HS} de la loi normale hors saut, p_i l'intensité de sauts, les paramètres μ_i^S et σ_i^S de la loi normale en cas de saut. Compte tenu de

la non monotonie des performances boursières, la résolution numérique de ce problème n'est pas satisfaisante puisqu'elle fournit des solutions pour des maxima locaux et qui de ce fait dépendent fortement des paramètres initiaux.

Pour pallier ce problème, on fixe arbitrairement une limite de sauts pour chaque régime boursier, puis on en déduit une intensité de sauts unique. Pour chaque régime boursier, on prend en compte uniquement la présence de sauts. Ensuite, on termine en calibrant les deux lois en fonction des deux types de données ainsi obtenues.

L'indice de référence présente un saut lorsque son rendement journalier est inférieur ou égal aux seuils de $L_1 = -2\%$ dans le cas du régime « Normal », et $L_2 = -5\%$ en régime de crise. Ces seuils sont fixés arbitrairement. Il est à noter que la fréquence des sauts est plus importante en cas de crise. On note p_i la probabilité d'occurrence d'un saut dans le régime i . On l'estime à l'aide des données historiques par la formule suivante :

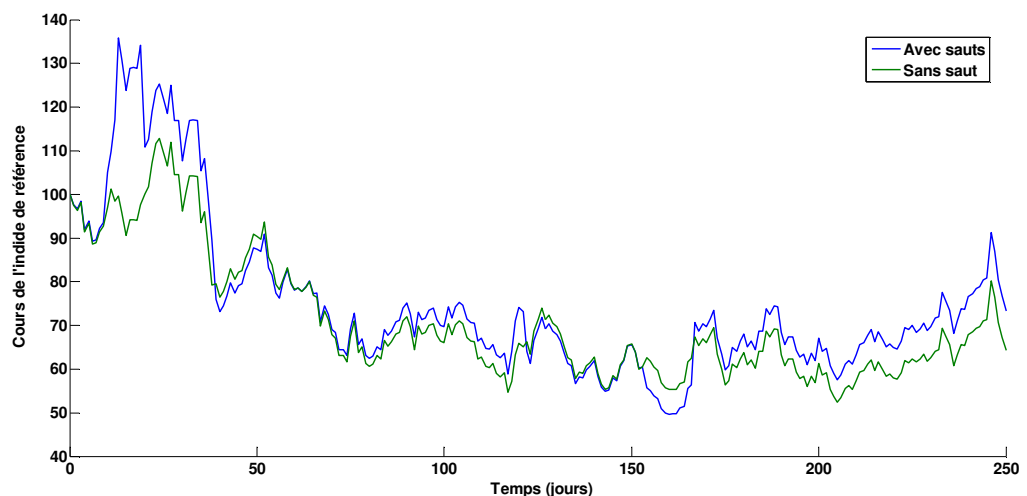
$$\hat{p}_i = \frac{\#\{\eta_i \leq L_i\}}{n}$$

Avec n le nombre de données et $\#(\cdot)$ le cardinal de la condition. Afin de simuler un saut, nous simulons une loi uniforme U sur $]0 ; 1[$.

Si $\hat{p}_i \geq u$ autrement dit si la probabilité d'avoir un saut dépasse u alors on se trouve en présence d'un saut.

Nous présentons dans le graphique suivant les trajectoires simulées sur 1 an du cours de l'indice de référence dans le cas d'un régime boursier « Normal ».

Fig.3 : Projection de cours de l'indice de référence (avec et sans saut)



Une des deux trajectoires correspond au cours de l'indice en absence totale de sauts et l'autre en cas de sauts. Le pas de temps est d'un jour.

VI. LES MESURES DE PERFORMANCES RELATIVES

La présentation des modèles de mesure de la performance demande une référence aux fondamentaux théoriques qui structurent les réflexions et recherches portant sur les actifs financiers. C'est pourquoi nous les rappelons brièvement sans qu'il s'agisse ici de réaliser un travail exhaustif.

Nous présentons les applications numériques qui ont été faites ainsi que leurs interprétations.

1. LA NECESSITE DE MESURER LA PERFORMANCE

1.1. L'INTERET THEORIQUE

Le besoin de sécurité qui pousse les agents économiques à placer leur épargne milite également en faveur de moyens de mesure adéquats. Il est indispensable de savoir à tout moment quel est le niveau de rémunération de l'argent placé et quel est le risque encouru afin de trouver le compromis acceptable pour chaque investisseur.

Aftalion et Poncet (1991) soulignent l'importance des enjeux de la mesure de performance. "A contrario, à première vue, l'existence de quelques "affaires" plus que douteuses concernant certains intermédiaires financiers ne devrait pas contredire ce mouvement (croissance de l'épargne placée dans les OPCVM) mais incitera justement les investisseurs à exiger des garanties quant au sérieux et à la crédibilité des performances affichées".

S'agissant en effet d'un engagement dont l'horizon est le long terme, les inconnues sont nombreuses : comment placer son épargne ? Cette épargne étant une privation de consommation immédiate dans l'espoir d'une rémunération qui permettra un meilleur niveau de consommation futur, comment choisir son niveau de risque de telle sorte que les performances soient au rendez-vous ? En d'autres termes, quelle est la bonne proportion d'actifs sans risque et d'actifs risqués pour un individu ? Comment définir un actif sans risque?

1.2. L'INTERET PRATIQUE

Le conflit né en 1999 entre un fonds de retraite d'Unilever et Mercury Asset Management, une filiale de Merrill Lynch, pour une performance jugée insuffisante face au risque couru (8% en dessous de l'indice de référence alors que le contrat unissant les parties limitait l'écart à 3%) est sans doute un accroc de gestion qui souligne l'importance du choix du prestataire de services et de sa capacité à respecter les critères du contrat de gestion pour répondre aux souhaits de l'investisseur ; c'est un cas classique de la relation d'agence. Ce fonds de retraite a au moins les moyens de mesure et les connaissances nécessaires à l'audit de la performance.

Comprendre la mesure de performance prend alors tout son sens. Connaître les causes de cette performance permet de se positionner ou de s'abstenir pour l'avenir sur la base de critères concrets autres que la seule relation de confiance entretenue avec le professionnel.

Dans notre étude nous nous basons sur certains critères de performances que nous décrivons dans la suite afin de construire notre analyse et tirer les conclusions concernant la

relation performance et contrôle des risques dans le cadre présenté dans les sections précédentes.

2. LE RATIO DE SHARPE

2.1. PRESENTATION DE LA MESURE

Le présentateur de la théorie du MEDAF définit son ratio de rentabilité/risque comme le rendement moyen en excès du taux sans risque du portefeuille géré divisé par l'écart type du portefeuille, synonyme de la variabilité. L'auteur substitue au risque systématique du portefeuille l'écart type des rentabilités constatées durant la période d'observation.

Nous présentons le raisonnement ex ante :

$$E(R_{pt}) = R_{ft} + \frac{\sigma_p(E(R_{mt}) - R_{ft})}{\sigma_m} \quad (48)$$

Avec

$E(R_{pt})$: la rentabilité espérée du portefeuille pendant la période t

$E(R_{mt})$: la rentabilité espérée du portefeuille de marché en t

R_{ft} : le taux sans risque en t

σ_p : le risque total du portefeuille géré

σ_m : le risque total du portefeuille de marché

A l'équilibre, la rentabilité en excès du taux sans risque se traduit par une égalité entre le portefeuille géré et celui du marché :

$$\frac{R_{pt} - R_{ft}}{\sigma_p} = \frac{R_{mt} - R_{ft}}{\sigma_m} \quad (49)$$

Avec

R_{pt} : la rentabilité du portefeuille géré pendant la période t

R_{mt} : la rentabilité du portefeuille de marché

R_{ft} : le taux sans risque en t

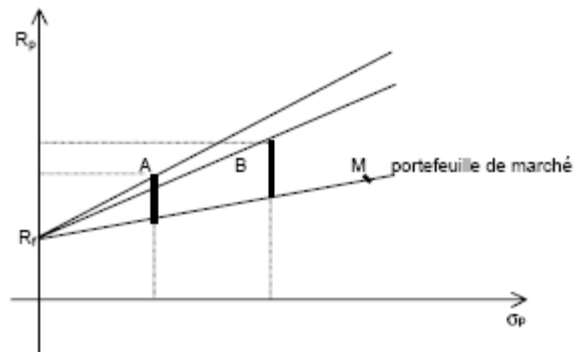
σ_p : le risque total du portefeuille géré

σ_m : le risque total du portefeuille de marché

De ce point de vue, la mesure de Sharpe apparaît comme celle de la régularité du portefeuille géré par rapport au marché. Le ratio de Sharpe s'écrit :

$$S = \frac{R_{pt} - R_{ft}}{\sigma_p} \quad (50)$$

SCHEMA
Le ratio de Sharpe



Note : Le portefeuille A dégage une rentabilité inférieure à B. La prise de risque de A est toutefois très inférieure à celle de B. Le ratio de Sharpe de A est supérieur à celui de B

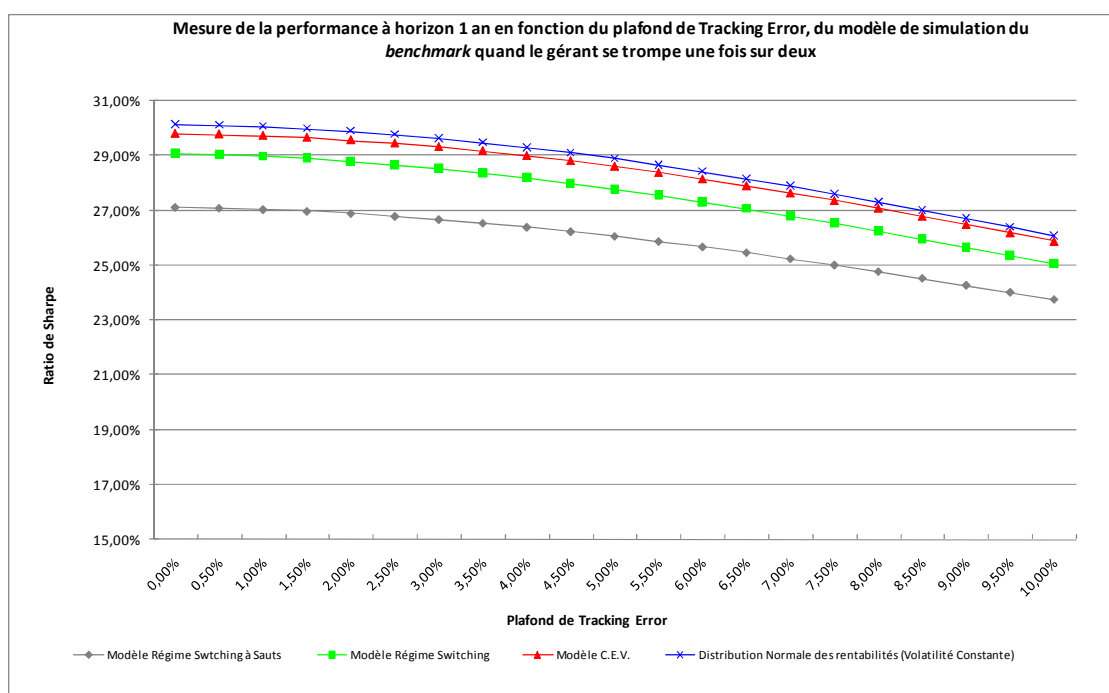
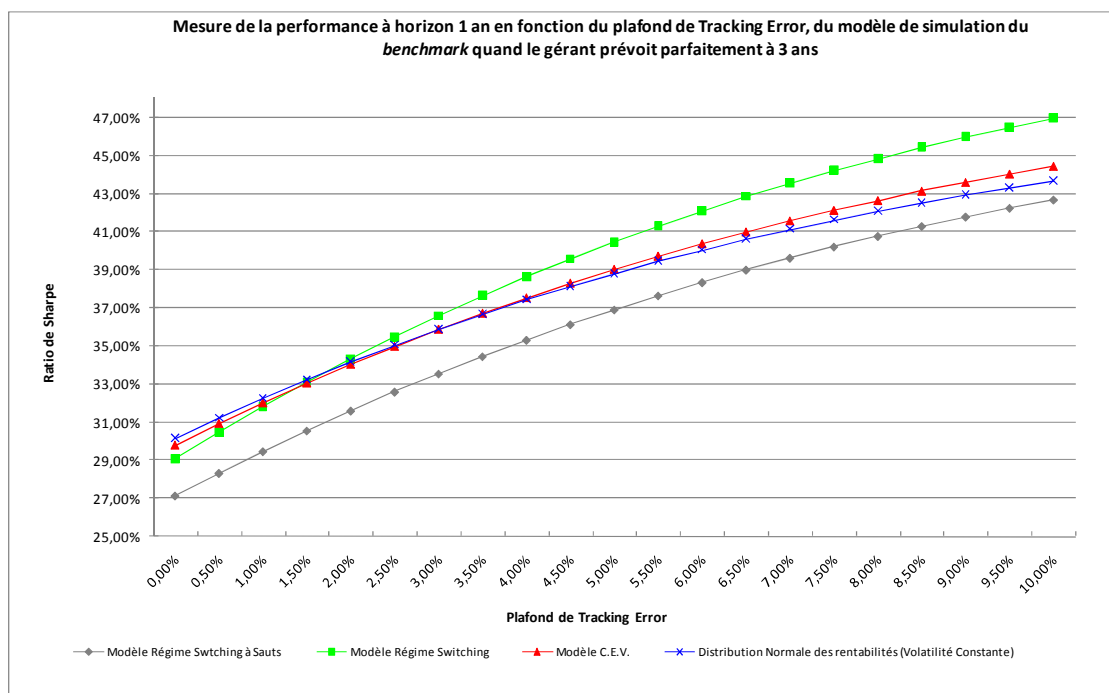
Sur le schéma, le portefeuille de marché est représenté de même que les portefeuilles A et B qui se situent sur des droites plus pentues que celle de la référence. Or, le niveau de risque est équivalent à un portefeuille qui se situerait sur la droite de marché. L'interprétation est la suivante : pour un niveau de risque équivalent à sa projection sur la droite du portefeuille de marché, le gérant du portefeuille A a sélectionné des titres qui apportent une meilleure rentabilité. Son classement est donc supérieur au benchmark. Le gérant du portefeuille B a fait de même, et, en termes de rentabilité, dégage une performance supérieure au portefeuille de marché mais au prix d'un risque plus élevé. Si un classement des portefeuilles se limite à la rentabilité sans prise en compte du risque, B l'emporte. La prise en compte du risque via l'écart type des rentabilités couronne A. C'est là l'utilité de la mesure de Sharpe. Cette mesure permet de classer des gérants suivant leurs performances.

Sharpe (1998) donne lui-même l'interprétation de son ratio avec les limites d'utilisation. L'investisseur qui a la possibilité de prêter ou d'emprunter à un taux fixé mais qui projette de ne détenir qu'un seul portefeuille risqué choisira celui qui a le ratio le plus élevé. En effet, la stratégie utilisée par le gérant de ce portefeuille correspond à la meilleure rentabilité possible compte tenu du niveau de risque accepté.

Cependant, comme les autres mesures, la sélection du portefeuille avec des données ex post n'est acceptable qu'en admettant le postulat des statisticiens que "toutes choses sont égales par ailleurs" ; la distribution des données historiques est à cette condition un bon outil de prévision. Il est admis par les investisseurs que l'utilisation de ce ratio est plus facile d'accès que les mesures de performances basées sur la fonction d'utilité, car, indépendamment de la notion d'aversion au risque, son utilisation est plus universelle. Dernier avantage et non des moindres, ce ratio n'étant pas conditionné par une variable, il échappe à la critique de Roll. Plus précisément, le ratio est véritablement fiable pour le cas de détention d'un seul actif risqué couplé à un prêt ou un emprunt au taux sans risque. Il reste potentiellement impropre pour le cas plus courant de détention de plusieurs actifs risqués.

2.2. RESULTATS EMPIRIQUES ET INTERPRETATION

Nous représentons ci-dessous le ratio de Sharpe comme mesure de performance à horizon 1 an en fonction du plafond de *tracking error*, et de différents modèles de simulation du benchmark. Nous considérons de plus deux cas, le premier où le gérant prévoit parfaitement à 3 ans et le second où le gérant se trompe une fois sur deux.



Pour les OPCVM, les mesures de risque reposent sur la variabilité passée des valeurs de marchés. Dans certains cas, la *tracking error* peut conduire le contrôle de risques à

contraindre le gestionnaire à revenir au benchmark quand il était sous-exposé parce qu'il prévoyait à juste titre une chute des marchés. En effet, un accroissement de la *tracking-error* peut être dû à une forte prise de risque du gestionnaire mais aussi tout simplement à un accroissement de la volatilité du benchmark. Un accroissement de la volatilité conduit ainsi à coller davantage au benchmark.

Nous observons bien que lorsque le gérant anticipe convenablement la hausse ou la chute du marché, une contrainte plafonnant sa *tracking error* va le contraindre à subir la chute en cas de sous-exposition au *benchmark* ou limiter sa performance en cas de hausse de l'indice de référence.

3. LE RATIO DE DOWD

3.1. PRESENTATION DU RATIO DE DOWD

Dowd (2000) considère une mesure de risque alternative à la variance (dénominateur du ratio de Sharpe) : la *Value-at-Risk* .

Examinons le cas où la variance n'est pas la mesure de risque. La question posée est : que se passe-t-il si le postulat selon lequel la variance est la mesure de risque accepté par tous les investisseurs n'est pas respecté ? Nous examinons donc le cas où la variance n'est pas prise comme mesure de risque. Dans ce cas, il suffirait « simplement » de remplacer le dénominateur du ratio de Sharpe par la valeur prise par le risque total du portefeuille. Le choix de la variance s'explique si les rendements proviennent d'une distribution normale. Dans ce cas, la variance ne détermine le risque que dans la mesure où elle augmente de façon monotone avec le risque de perte sur un investissement. Puisque toute variation positive par rapport à la moyenne est exactement compensée par une variation négative avec la même probabilité, une mesure de variabilité rend adéquatement compte du risque de perte.

Par contre, si la distribution des rendements n'est pas uniquement caractérisée par son espérance et sa variance – ce qui est le cas en pratique – il devient ardu de justifier le choix de cette mesure de risque. Si deux distributions avec la même variance ne présentent pas les mêmes profils de perte, alors elles doivent nécessairement présenter un risque différent.

Les modifications du dénominateur du ratio de Sharpe visent donc à identifier spécifiquement une mesure de risque de perte applicable à différente distribution de rendements. La direction que nous prenons dans ce contexte est la **Value-at-Risk**.

La perspective empruntée est celle d'un investisseur qui ne se soucie que des événements extrêmes.

Cette mesure de performance compare la surperformance du portefeuille p par rapport à sa *Value-at-Risk* (VaR). Elle peut être écrite de la façon suivante :

$$D_{p,\alpha} = \frac{[E(r_p) - r_f]}{VaR_{p,\alpha}^{-1}(r_p)} \quad (51)$$

Où $VaR_{p,\alpha}$ est la *Value-at-Risk* au seuil de probabilité α du portefeuille p .

Sous l'hypothèse de normalité des rendements la VaR à un niveau α est donnée par :

$$VaR_{\alpha}(x) = -(E(x) + \sigma_x z_{\alpha}) \quad (52)$$

Où x est le rendement d'un actif risqué.

La mesure de performance $D_{p,\alpha}$ soulève alors un sérieux problème. La mesure de performance peut être manipulée en changeant l'allocation en capital entre l'actif risqué du portefeuille et l'actif sans risque. En effet, la mesure de performance peut être rendu aussi grande que voulu. Plus formellement, l'allocation d'actif entre l'actif risqué et l'actif sans risque consiste, pour un investisseur, à investir une proportion a dans l'actif risqué et la proportion $1-a$ dans l'actif sans risque. Le rendement du portefeuille s'exprime alors comme suit :

$$r_p = ax + (1 - a)r_f = a(x - r_f) + r_f \quad (53)$$

Exprimons maintenant $D_{p,\alpha}$:

$$D_{p,\alpha} = \frac{E(r_p) - r_f}{-(E(r_p) + \sigma_{r_p} z_{\alpha})} \quad (54)$$

Sachant que $\sigma_{r_p} = a\sigma_x$ nous obtenons :

$$D_{p,\alpha} = \frac{E(r_p) - r_f}{-(E(r_p) + \sigma_{r_p} z_{\alpha})} = \frac{a(E(x) - r_f)}{-a(E(x) - r_f + \sigma_x z_{\alpha}) - r_f} \neq D_{x,\alpha} \quad (55)$$

En nous plaçant, dans un espace risque-rendement et en considérant une certaine frontière efficiente, la performance du portefeuille dépend du choix d'un point le long de cette frontière. Il est alors aisé de trouver un point sur cette frontière efficiente tel que le risque devient nul. Cela correspond à :

$$-VaR_{\alpha}(r_p) = a(E(x) - r_f + \sigma_x z_{\alpha}) - r_f = 0.$$

La solution est alors :

$$a = \frac{r_f}{r_f - E(x) - \sigma_x z_{\alpha}}$$

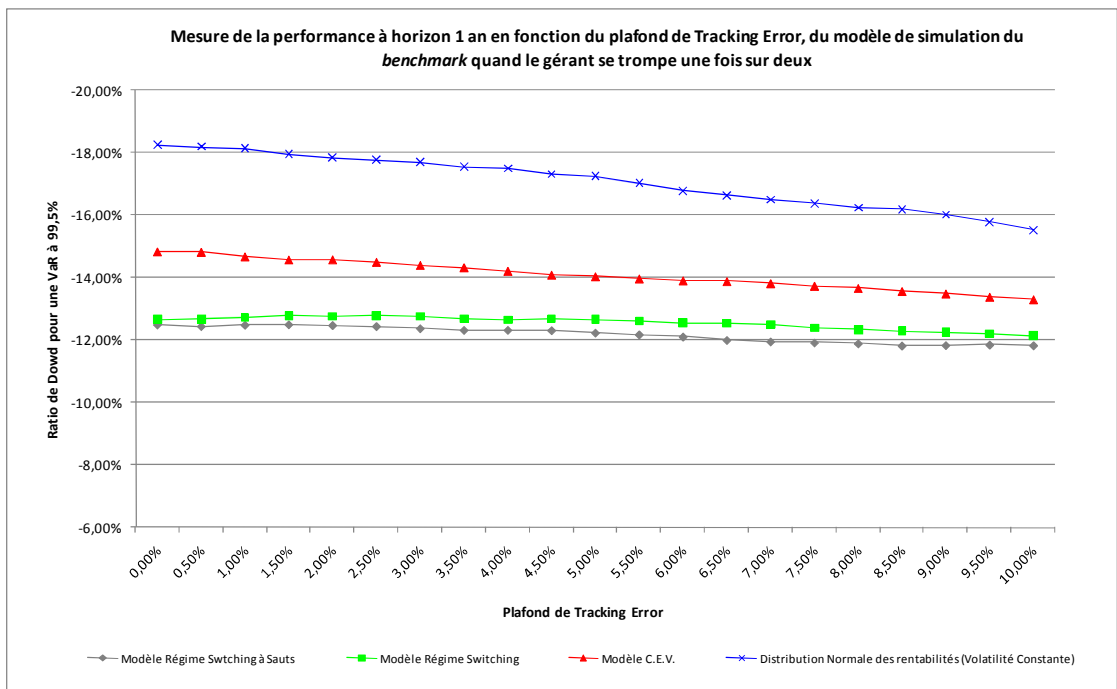
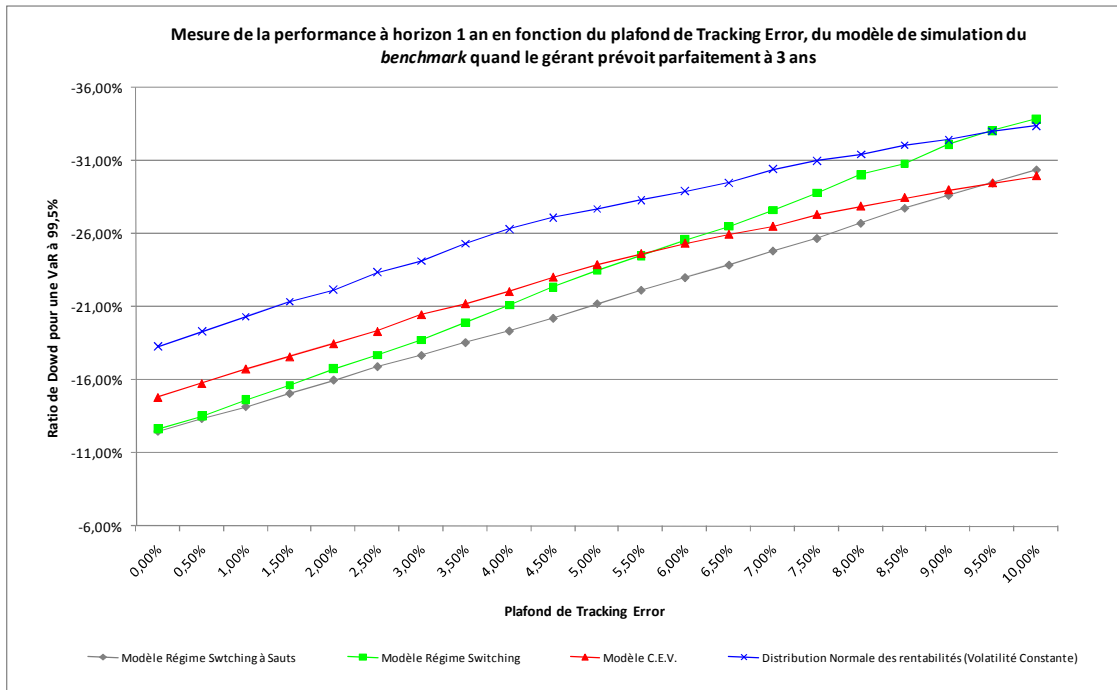
Pour illustrer notre propos, supposons que le taux sans risque est $r_f = 5\%$, que le rendement espéré de l'actif risqué est $E(x) = 10\%$, l'écart type $\sigma_x = 10\%$ et que le seuil de probabilité $\alpha = 5\%$. Afin, que la mesure de performance soit infiniment grande, le gérant doit investir $a \approx 43,67\%$ dans l'actif risqué et le reste dans l'actif sans risque.

Le cas d'une distribution normale des rentabilités présente un intérêt limité. Cependant, l'approche du risque par la VaR peut s'avérer intéressante lorsque les rendements ne suivent pas une distribution normale, par exemple une distribution asymétrique ou avec des queues épaisses (C.E.V, Régime « Switching »,..).

Dans tous les cas, le ratio de Sharpe modifié reprend la mesure de risque correspondant (VaR , $MVaR$ ou $CVaR$) au dénominateur de la formule originale. Nous considérons dans notre étude la mesure de performance introduite par Dowd (2000) afin de pouvoir apprécier l'écart de surperformance relativement à l'épaisseur des queues de distribution.

3.2. RESULTATS EMPIRIQUES ET INTERPRETATION

Nous présentons ci-dessous le ratio de Dowd pour une *VaR* à 99,5%. Cette mesure de performance est prise à horizon 1 an, pour différents plafonds de *tracking error* et différents modèles de diffusion de l'indice de référence. Nous considérons deux cas de gestion, un cas où le gérant prévoit parfaitement à 3 ans et un cas où le gérant se trompe une fois sur deux.



Le ratio de Dowd est d'autant plus performant qu'il est élevé en valeur absolue. On observe donc que la performance relativement à la queue de distribution (gauche) est une fonction croissante du plafond de *tracking error* dans le cas d'un gérant ayant une bonne anticipation des fluctuations du *benchmark*. Cette mesure de performance qui se place dans le cadre moyenne-VaR rejoint la conclusion faite pour le ratio de Sharpe. Le contrôle des risques doit avoir une politique de contrôle – dans notre étude via le plafond de *tracking error* – cohérente avec les performances des gérants. Contraindre un gérant ayant de bonnes anticipations peut avoir des effets néfastes sur la gestion à long terme.

4. LE RATIO D'INFORMATION

4.1. PRESENTATION DU RATIO D'INFORMATION

Le ratio d'information, parfois désigné en anglais sous le nom *d'appraisal ratio*, se définit par la rentabilité résiduelle du portefeuille, rapportée à son risque résiduel. La rentabilité résiduelle d'un portefeuille correspond à la part de rentabilité qui n'est pas expliquée par le *benchmark*. Elle provient des choix faits par le gérant, de surpondérer les titres pour lesquels il espère une rentabilité supérieure à la rentabilité du *benchmark*. Le risque résiduel, ou diversifiable, mesure les variations du rendement résiduel. Sharpe (1994) présente le ratio d'information comme une généralisation de son ratio, dans laquelle l'actif sans risque est remplacé par un portefeuille de *benchmark*. Le ratio d'information se définit par la relation suivante :

$$IR = \frac{E(R_P) - E(R_B)}{\sigma(R_P - R_B)} \quad (56)$$

On reconnaît la *tracking-error* au dénominateur. Ce ratio peut également s'écrire de la façon suivante :

$$IR = \frac{\alpha_P}{\sigma(e_P)}$$

Où α_P désigne la rentabilité résiduelle du portefeuille, telle que la définit Jensen et $\sigma(e_P)$ désigne l'écart-type de cette rentabilité résiduelle.

Comme précisé ci-dessus, ce ratio s'utilise dans le cadre de la gestion « benchmarkée ». Il permet de vérifier que le risque pris par le gérant, en s'écartant du *benchmark*, est suffisamment rémunéré. Il constitue un critère d'évaluation du gérant. Les gérants cherchent à maximiser sa valeur, c'est-à-dire à concilier une rentabilité résiduelle élevée et une *tracking-error* faible. Il est important de regarder conjointement la valeur du ratio d'information et celle de la *tracking-error*. En effet, pour une même valeur du ratio d'information, plus la *tracking error* est faible, plus la performance du gérant aura de chance de persister au cours du temps.

Le ratio d'information est donc un indicateur qui permet d'évaluer le niveau d'information d'un gérant par rapport à l'information publique disponible, ainsi que son habileté à réaliser une performance supérieure à celle de la moyenne des gérants. Comme ce ratio ne prend

pas en compte le risque systématique des portefeuilles, il n'est pas adapté pour comparer la performance d'un portefeuille bien diversifié, avec celle d'un portefeuille peu diversifié.

Comme présenté, cette mesure a le mérite de la simplicité puisque la rentabilité en excès du portefeuille géré est dépendante de l'unité supplémentaire de volatilité du portefeuille de marché. Cependant cette mesure de performance n'est pas interprétable dans le cadre de notre étude.

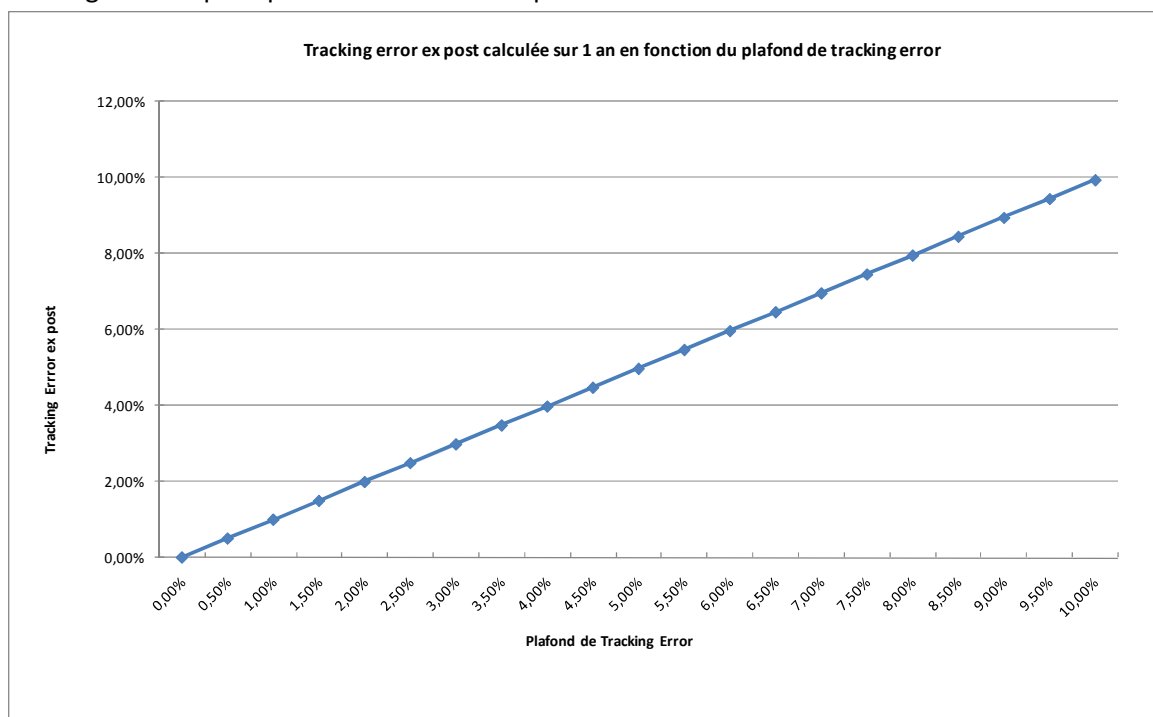
4.2. LIMITE DU RATIO D'INFORMATION

Le ratio d'information tente d'apporter une réponse à la comparaison entre le résultat obtenu par le gérant et son indice de référence. Ce ratio nous permet de relier les fondements théoriques au cadre statistique de la moyenne variance comme élément de mesure incontournable. Ce ratio apparaît toutefois comme étant insuffisant aux yeux des professionnels pour qualifier précisément la performance. En effet, la première limite est que cette mesure reste tributaire du choix du benchmark, et ce choix n'est pas neutre. La gestion d'un portefeuille peut ainsi apparaître nettement plus risquée face un à indice plutôt qu'un autre. Choisir par exemple un indice européen plutôt qu'un indice purement français n'est donc pas sans conséquences.

La limite la plus importante et qui est mise en évidence dans notre étude est le caractère ininterprétable de cette mesure dans le cas d'une gestion avec un plafond de *tracking error*.

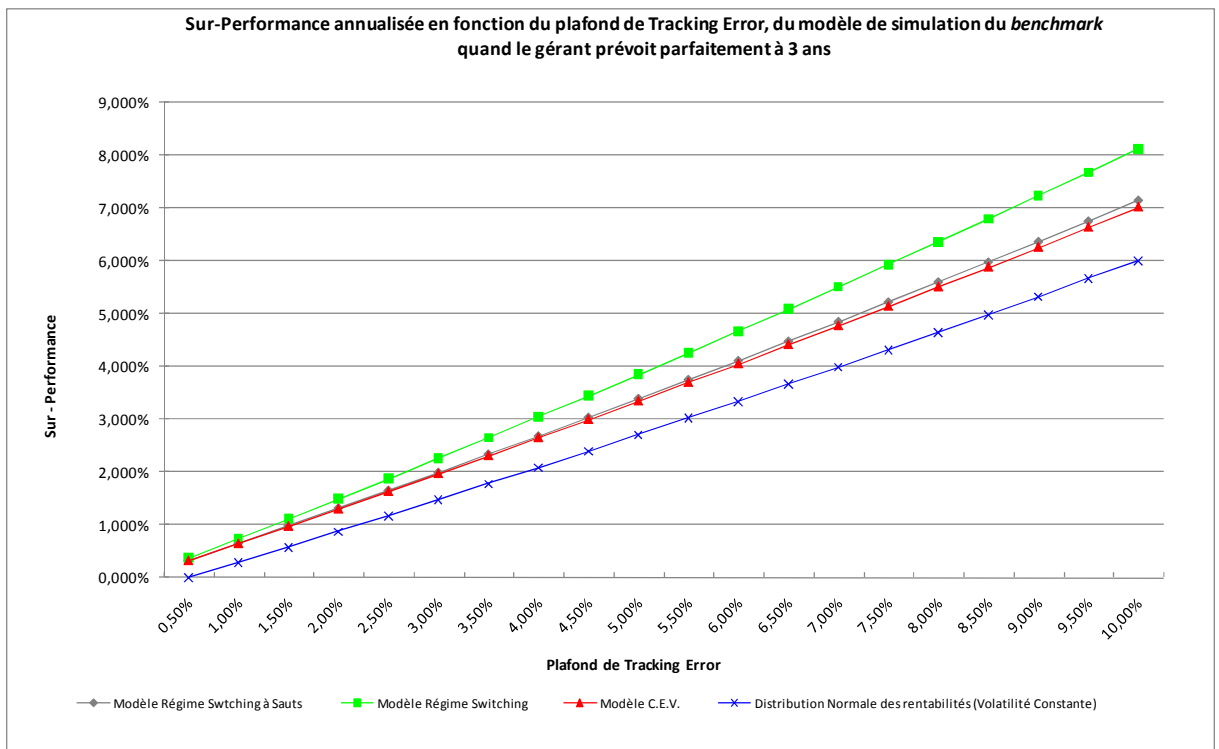
Le ratio d'information correspond au quotient entre le surplus de rentabilité du portefeuille – par rapport au benchmark – et de la *tracking error ex post*.

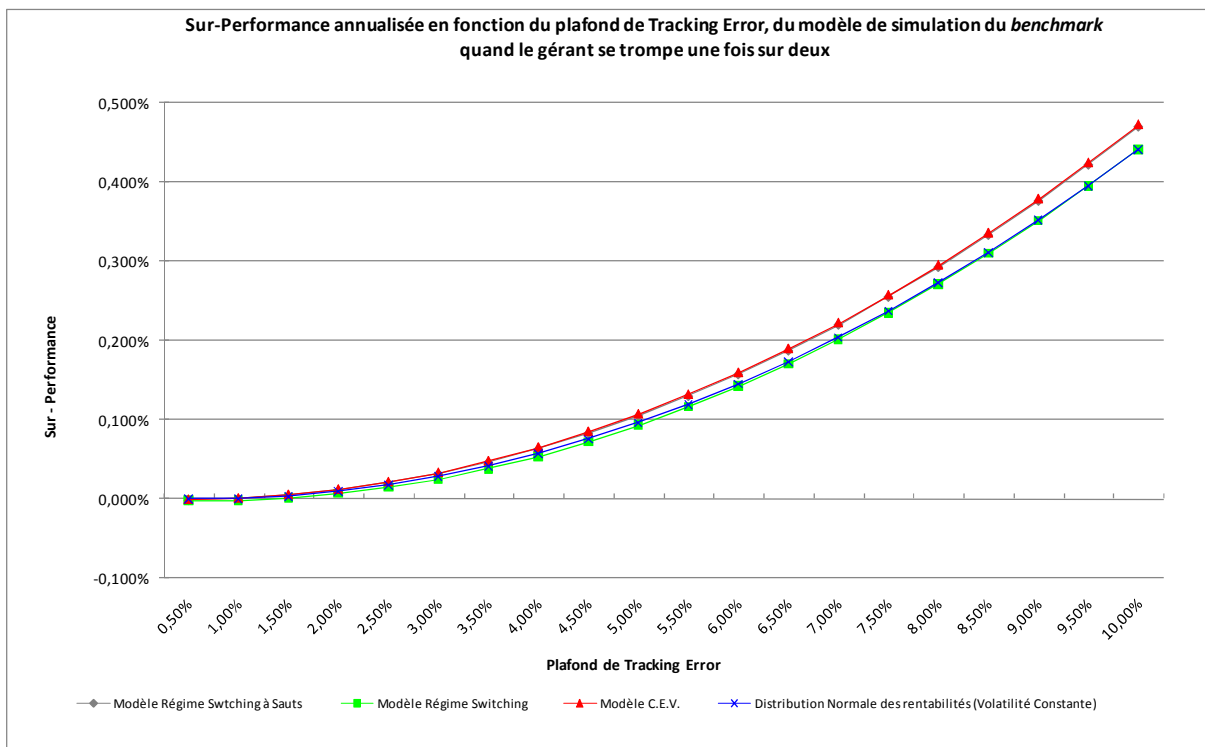
Le graphique ci-dessous représente la relation entre la *tracking error ex post* et le plafond de tracking error imposé par le contrôle des risques.



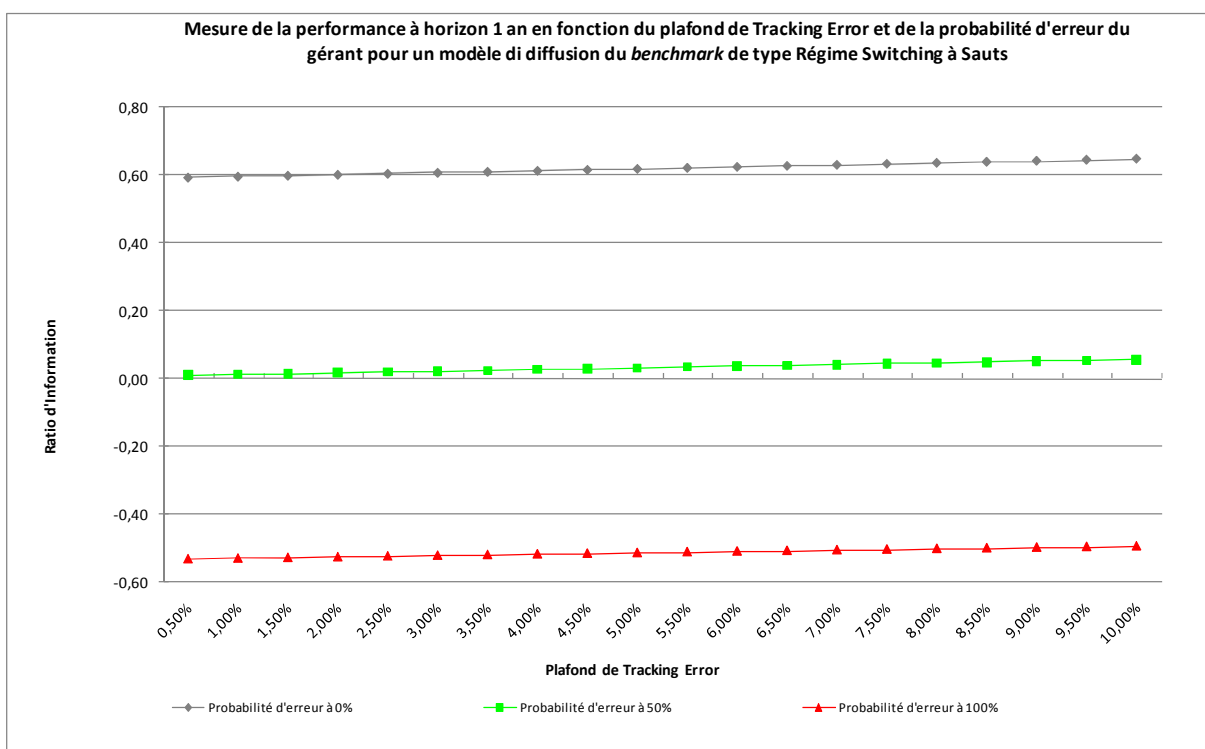
Comme nous l'attendions, la *tracking error ex post* dépend linéairement du plafond de *tracking error*.

Intéressons-nous au surplus de rentabilité du portefeuille par rapport à son benchmark. Comme nous l'observons sur les graphiques ci-dessous, le surplus de rentabilité, pour un gérant qui prévoit parfaitement à 3 ans et un gérant qui se trompe une fois sur deux, est quasi linéaire.





Représentons le ratio d'information en fonction du plafond de *tracking error*.



Le ratio d'information correspond au rapport du surplus de rentabilité et de la *tracking error* *ex post* ayant tous deux une dépendance linéaire au plafond de *tracking error*. Nous obtenons donc une mesure de performance constante, indépendante du plafond de *tracking error*. Pour un plafond de *tracking error* donné la valeur du ratio d'information dépend

seulement de la qualité de l'information que détient le gérant. Nous nommons « probabilité d'erreur », la probabilité qu'un gérant se trompe dans sa prévision. Nous voyons bien, que lorsque le gérant prévoit parfaitement à 3 ans (Cf. Probabilité d'erreur 0%), le ratio d'information est élevé : 0,6. Dans le cas où le gérant se trompe avec une forte fréquence, le ratio est négatif (Cf. Probabilité d'erreur 100%). Dans ce cas, le gérant professionnel n'apporte aucune valeur ajoutée à la gestion d'un porteur naïf, la prise en compte des frais d'entrée et de sortie vient aggraver le constat qui est réalisé hors frais.

5. L'INDICE D'AFTALION ET PONCET (AP)

5.1. PRESENTATION DE L'INDICE D'AFTALION ET PONCET

Aftalion et Poncet (1991) essaient de remédier aux insuffisances du ratio d'information quand le benchmark ne reproduit pas le même style de gestion. Ils estiment que chaque portefeuille doit être évalué par rapport à un portefeuille de structure comparable. Par exemple, si un portefeuille est investi en permanence à hauteur de 60% en actions et de 40% en obligations, le benchmark de référence doit avoir la même composition de telle sorte que la mesure de *tracking error* ait une signification réelle. Dans le cadre de notre étude celui-ci est tout à fait pertinent car le gérant n'intervient pas sur la composition du fonds mais sur son exposition sur le *benchmark*. Aftalion et Poncet proposent un indicateur global de performance noté AP défini comme suit:

$$AP = R_{pt} - R_{mt} - PR \times (\sigma_{pt} - \sigma_{mt}) \quad (57)$$

Avec :

R_{pt} : la rentabilité du portefeuille géré pendant la période t

R_{mt} : la rentabilité du benchmark pendant la période t

σ_{pt} : le risque du portefeuille géré pendant la période t (écart type)

σ_{mt} : le risque du benchmark pendant la période t (écart type)

PR : La prime de risque

Ils postulent qu'un portefeuille risqué doit rapporter davantage qu'un portefeuille dont le risque est minimisé et pour lequel l'investisseur attend en retour une rentabilité moindre.

Reste à calculer le montant de la prime qui " Devrait correspondre à ce qu'en moyenne le marché exige de taux de rentabilité supplémentaire par point de risque".

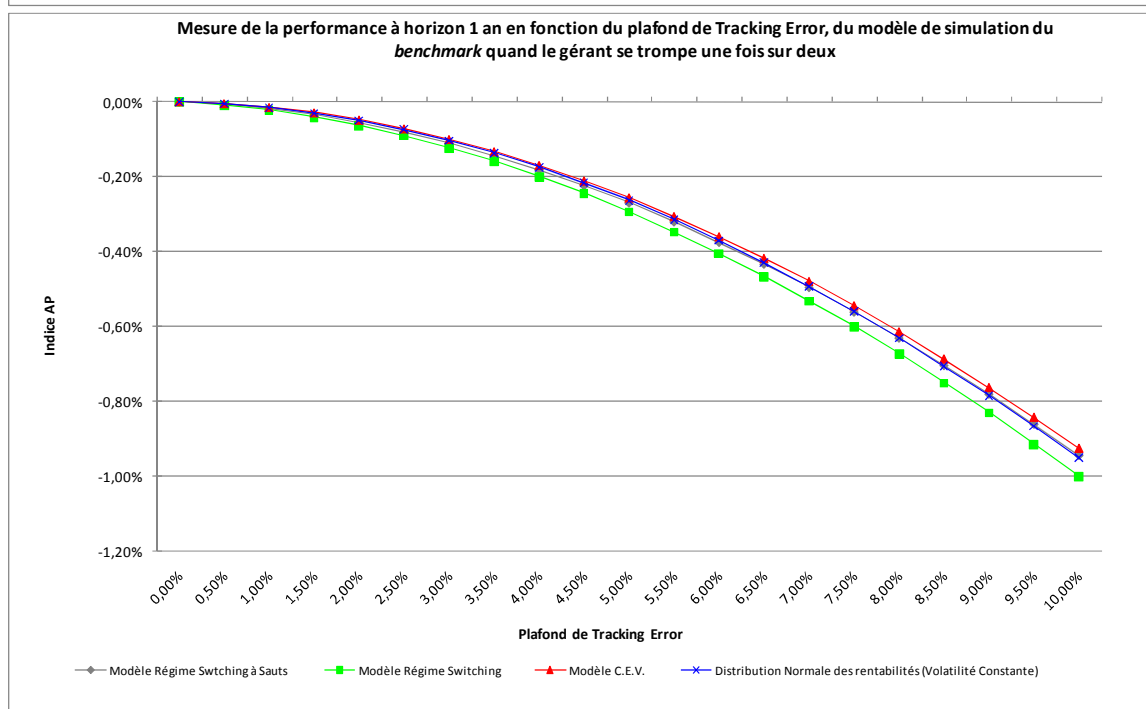
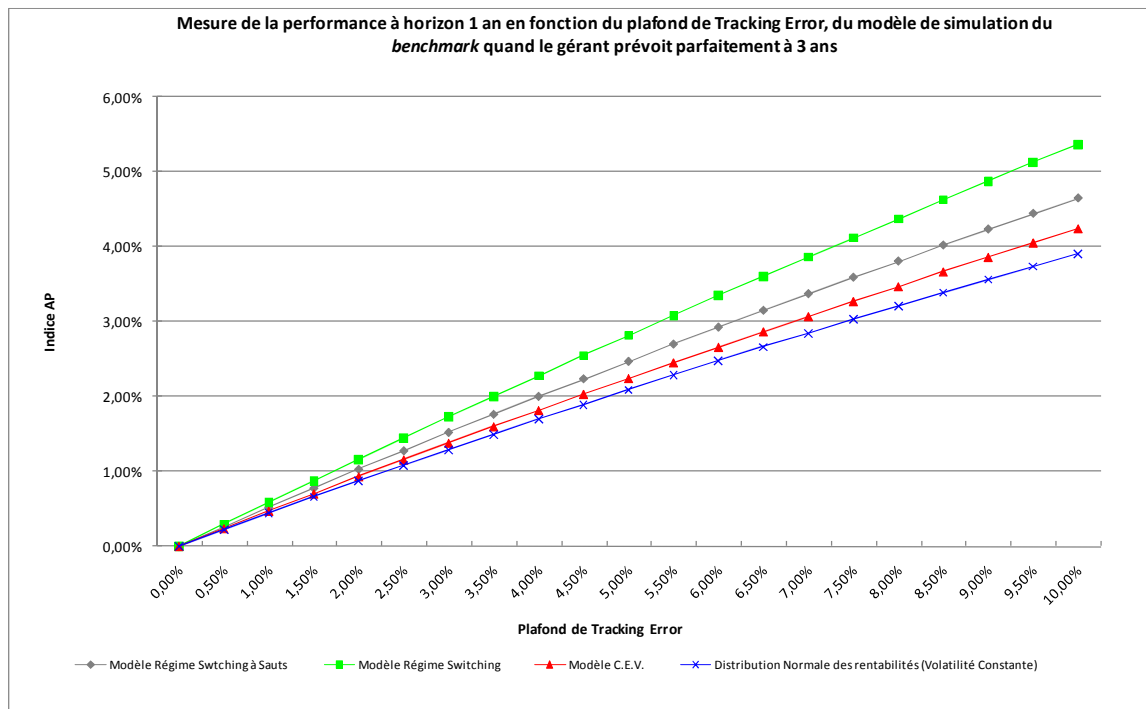
Par exemple, sur une période de 35 ans, le taux sans risque est de 8%, il représente le marché monétaire qui a connu une volatilité de 3% durant la période. Un portefeuille diversifié composé d'actions françaises a une rentabilité de 11% soit une prime de 3% par rapport au taux sans risque. La volatilité du portefeuille actions est de 18%. Donc, dans ce cas, 15 points de risque ont procuré 3 points de rentabilité supplémentaire. La prime de risque PR est égale à 3/15 soit 20%.

Les auteurs rappellent que le β de la régression linéaire supérieur à 1 désigne une gestion plus risquée que la référence. L'alpha, représentation du risque spécifique, est du même

signe que l'indice AP, l'ordonnée à l'origine positive révèle une gestion dont la performance est supérieure au *benchmark*. Dans la littérature, la prime de risque *PR* serait comprise entre 0,20 et 0,40 pour la France. Dans notre étude, nous considérons qu'elle est égale à 0,3.

5.2. RESULTATS EMPIRIQUES ET INTERPRETATION

Le graphique ci-dessous représente l'indice d'Aftalion et Poncet (indice AP), calculé sur un horizon d'un an, en fonction du plafond de *tracking error*, du modèle de diffusion du *benchmark* dans le cas où le gérant prévoit parfaitement à 3 ans et dans le cas où il se trompe une fois sur deux.



Comme nous le voyons cette mesure de performance rejoint les interprétations faites pour le ratio de Sharpe et le ratio de Dowd dans le cadre de la mesure de l'impact du critère de contrôle des risques sur la performance d'un fonds.

VII. ETUDE DE SENSIBILITE

1. ETUDE DE LA SENSIBILITE AU MODELE DE DIFFUSION DE L'INDICE DE REFERENCE

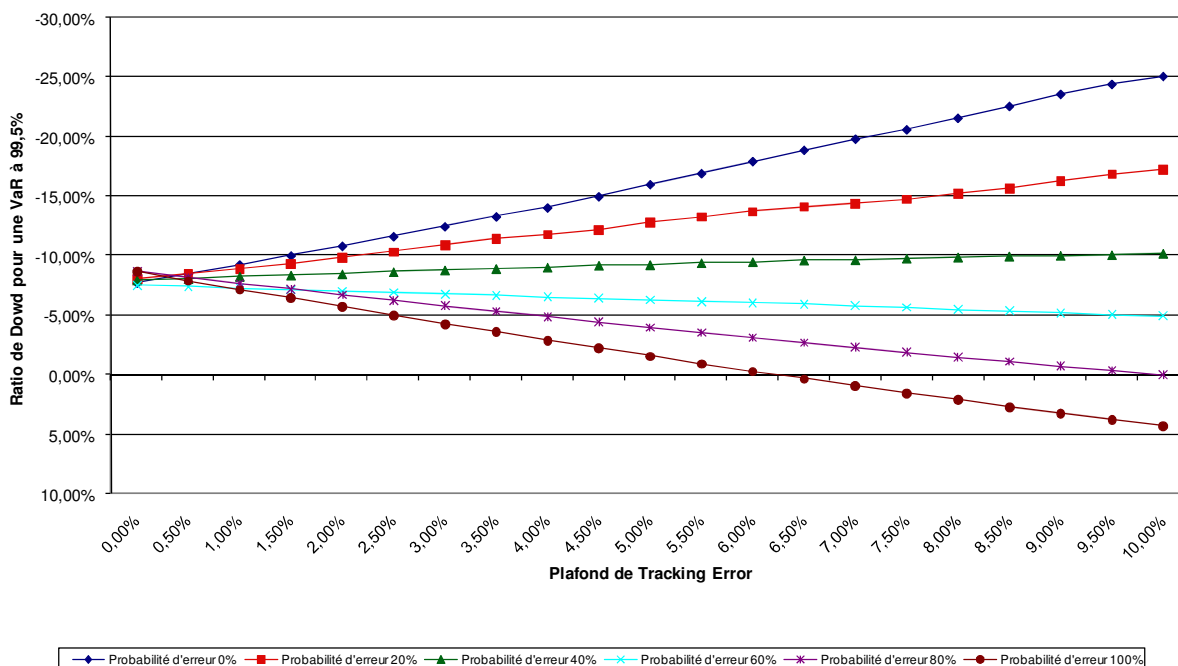
Les mesures de performance présentées précédemment nous permettent de statuer sur leur sensibilité au modèle de diffusion de l'indice de référence. Nous observons que les différentes mesures de performance convergent dans le même sens quel que soit le modèle de diffusion choisi. Des écarts restent néanmoins visibles et s'expliquent par les caractéristiques propres à chaque modèle. Dans le cas de la mesure de Dowd (2000), les écarts s'expliquent par l'épaississement des queues de distributions. En effet, nous introduisons une volatilité locale (modèle CEV), puis des régimes (modèle « régime switching » et enfin des sauts.

Cela nous permet donc de mettre en évidence l'impact du choix du modèle de diffusion dans une politique de gestion des risques. Le caractère leptokurtique des distributions de rendements à horizon 1 an impacte considérablement les mesures de performances décrites précédemment. On peut par exemple avoir sur une mesure de performance tenant compte des queues de distribution un écart considérable. Nous observons, par exemple, pour la mesure de Dowd un écart d'environ 3% entre une distribution normale des rendements et une distribution issue d'un modèle de diffusion de type « régime switching à sauts ». Cet écart n'est pas négligeable, à moyenne et volatilité égales, les performances relatives peuvent être assez éloignées. Dans le cadre d'une politique de gestion du risque l'hypothèse sur le modèle de diffusion de l'indice de référence pour orienter les décisions prises par les gérants est fondamentale et peut mener à des écarts importants et donc à des pertes.

2. ETUDE DE LA SENSIBILITE AU COMPORTEMENT DU GERANT

Nous présentons dans les graphiques suivant la mesure de performance de Dowd pour un portefeuille géré sur un horizon d'un an, en fonction du plafond de *tracking error* et de la probabilité d'erreur du gérant pour un modèle de diffusion du *benchmark* de type « régime switching à sauts ».

Mesures de la performance du portefeuille à horizon 1 an en fonction du plafond de Tracking Error et de la probabilité d'erreur du gérant pour un modèle de diffusion du benchmark du type Régime Switching à Sauts



Comme nous pouvons nous en douter, le ratio de Dowd est d'autant plus performant que les prévisions du gérant sont bonnes. Cependant, ce qui suscite plus d'attention est la mise en évidence d'une classe de gérant complètement insensible au plafond de *tracking error*. En effet, nous pouvons voir sur le graphique précédent, que les gérants se trompant dans leurs prévisions avec une probabilité de 46,3% (résultat obtenu empiriquement sur 10000 scénarios) sont indifférents au plafond de *tracking error*, soit au contrôle des risques. Une question se pose donc sur la légitimité du critère de contrôle des risques lorsque l'on est confronté à ce type de gérant.

Aujourd'hui beaucoup de société de gestion utilisent le critère de *tracking error* pour piloter leur politique de gestion des risques, des questions sous-adjacentes se posent à savoir, sur la qualité d'évaluation du critère, sa cohérence vis-à-vis des *asset managers* et surtout sur la coordination entre le contrôle des risques et l'*asset management*. Nous joignons en annexe 3 les tableaux récapitulatifs des statistiques descriptives de la distribution des performances à horizon un an du portefeuille, en fonction du plafond de tracking error (TE), du modèle de diffusion du benchmark dans le cas où le gérant prévoit parfaitement à 3 ans, ainsi que lorsqu'il se trompe une fois sur deux.

VIII. CONCLUSION

Pour les OPCVM, les mesures du risque reposent sur la variabilité passée des valeurs de marchés. La *tracking-error*, écart-type de la sur(ou sous) performance par rapport au benchmark est souvent utilisée par les sociétés de gestion pour définir « un budget risque ». Dans certains cas, cet indicateur peut conduire le contrôle de risques à contraindre le

gestionnaire à revenir au benchmark quand il était sous-exposé parce qu'il prévoyait à juste titre une chute des marchés.

Comme nous avons pu le voir dans ce chapitre, différents paramètres interviennent dans le pilotage du risque. Un risque de modèle peut entraîner un écart considérable dans la mesure de la performance entraînant à fortiori une dérégulation entre la gestion et le contrôle des risques.

La procyclicité des règles et des méthodes de contrôle de risques peut gravement nuire à la performance à long terme. La performance d'un OPCVM est directement affectée par le réglage de son contrôle de risque. Un contrôle de risque mal coordonné avec la gestion ou mal étalonné est une cause fréquente de sous-performance.

PARTIE III :
LE PERIMETRE D'APPLICATION ET LES LIMITES DE SOLVABILITE II

I. LA DIRECTIVE SOLVABILITE II

1. LE CADRE CONCEPTUEL

La Directive Solvabilité II, votée par le Parlement Européen le 22 avril 2009, a été adoptée par le Conseil ECOFIN le 5 mai et a été publiée au Journal Officiel des Communautés Européennes le 25 novembre 2009. Cette directive, applicable à horizon 2012, remplace les anciennes normes de solvabilité qui imposaient un niveau minimal de fonds propres en fonction du montant des provisions (en vie) ou des cotisations et/ou prestations (en dommage). Ce nouveau système prudentiel demande que les risques soient identifiés et que les fonds propres requis soient calculés en fonction des risques encourus. Il repose donc sur des mesures de risques.

Le principe général de la directive consiste à appréhender le risque à travers le critère de *VaR* (*Value-at-Risk*), en l'occurrence un quantile à 99,5%, appliqué à une notion de situation nette en « juste valeur » (*Fair Value*). Cette situation nette, en anglais NAV (*Net Asset Value*), correspond à certaines conventions, proches des normes comptables internationales mais non identiques. Le bilan en juste valeur Solvabilité II traduit une certaine conception des engagements pris par l'assureur, et s'intéresse aux actifs en juste valeur.

A ce cadre conceptuel général s'ajoute une déclinaison particulière : les fonds propres requis font l'objet, dans la formule standard, de calculs par type de risque, qui sont ensuite combinés au moyen de formules de composition du risque, en pratique à partir de matrices de corrélation supposant la stabilité et la linéarité des dépendances, voire dans certains cas l'indépendance des risques. Cela peut ainsi constituer une limite importante voire dramatique dans certains scénarios de marché.

2. LES PRINCIPAUX OBJECTIFS DE LA DIRECTIVE

Tandis que la réforme précédente avait pour but de mettre à jour le système européen de solvabilité existant, le projet Solvabilité II a une portée plus vaste. Il s'agit d'un exercice de révision plus radical du régime de solvabilité, à la lumière des évolutions actuelles de l'assurance, des techniques de gestion des risques et des techniques financières, des normes comptables. L'un des principaux objectifs du projet est d'« établir des exigences de solvabilité mieux adaptées aux risques effectivement assumés par les entreprises d'assurance et d'encourager celles-ci à mieux évaluer et contrôler ces risques ». Plus radicalement, « zero faillite » demeure l'objectif officiel. La directive est organisée en trois piliers, présentés dans le tableau suivant :

Pilier 1	Pilier 2	Pilier 3
Ressources financières	Règles de contrôle	Discipline de marché
Les provisions, les actifs et les fonds propres exigés, ainsi que d'éventuelles exigences supplémentaires au niveau du groupe.	Contrôle interne, Contrôle de gestion des risques par l'autorité de contrôle prudentiel contenant l'audit des : - Risques d'exposition - Modèles internes - « Stress testing » sur les provisions et les actifs - Adéquation actif/passif - Sanctions	Recommandations et exigences pour les compagnies d'être plus transparentes. Elles pourraient être obligées à divulguer des informations sur leur exposition aux risques, leur gestion des risques....

Le passage du bilan traditionnel au bilan Solvabilité II intègre les normes comptables internationales IFRS et y ajoute des retraitements. Le nouveau régime de solvabilité s'appuie sur une vision économique de l'ensemble des postes du bilan (placements, provisions, etc.). Il s'agit de déterminer l'excédent d'actifs nécessaire par rapport aux engagements. Un premier bilan Solvabilité II a été demandé aux assureurs par les autorités de contrôle le 30 juin 2009. Aujourd'hui, la commission européenne et le CEIOPS invitent tous les organismes d'assurance européens à participer activement à la 5^{ème} étude quantitative d'impact (QIS 5), dont les objectifs sont de :

- Fournir des renseignements détaillés quant aux impacts quantitatifs de solvabilité II sur le bilan des assureurs et plus particulièrement de l'introduction des futures mesures de niveau 2 ;
- Vérifier l'adéquation des spécifications techniques aux principes et objectifs développés dans la directive Solvabilité II ;
- Collecter des données tant quantitatives que qualitatives sur les différentes options politiques qui seront évaluées dans le cadre de l'analyse d'impact sur les futures mesures de niveau 2 ;
- Collecter des données quantitatives afin de parfaire le calibrage de la formule standard.

Il y a désormais deux niveaux d'exigence de capital :

1. **Un seuil minimal obligatoire** (MCR : Minimum Capital Requirement) pour rester dans le marché (dans ce cas, le seuil de marge doit être fixé suffisamment bas et par une formule qui n'a pas besoin d'être trop raffinée). Actuellement, le fonds de garantie minimum et la marge de solvabilité réglementaire répondent à cette fonction. Dans

le cadre de Solvabilité II, si le MCR n'est pas atteint, les autorités de contrôle pourront retirer l'agrément à la compagnie d'assurance.

2. **Un capital cible** (SCR : Solvency Capital Requirement) pour faire face aux aléas de l'exploitation, pour maintenir un risque, quasiment nul, de faillite. Il s'agit d'un capital cible mais pas forcément d'un capital minimum requis. Il doit être plus élevé que le seuil qui déclenche une intervention automatique de la part des autorités de contrôle. Son franchissement à la baisse entraînerait l'exigence d'un plan de redressement.

Le projet Solvabilité II a pour objectif d'introduire un contrôle de la solvabilité plus progressif sur un intervalle de confiance explicite calculé sur le niveau de l'exigence de marge de solvabilité. La directive Solvabilité II implique un système à deux niveaux : un contrôle interne des risques et son contrôle par le superviseur. La décision d'intervention de l'autorité de contrôle se référera à la position de l'entreprise par rapport au MCR et au SCR.

3. DISPOSITIONS GENERALES CONCERNANT LE CAPITAL DE SOLVABILITE REQUIS.

Le Capital de Solvabilité Requis correspond (article 100) au capital économique dont a besoin une entreprise d'assurance ou de réassurance pour limiter théoriquement la probabilité de ruine à 0,5%. Son calcul utilise la méthode de la *VaR*, conformément à la formule standard ou dans le contexte d'un modèle interne : toutes les pertes potentielles sur les 12 mois à venir, y compris celles qui découleraient d'une réévaluation défavorable des actifs et passifs, doivent être évaluées. Le Capital de solvabilité Requis vise à refléter le *profil de risque réel de l'entreprise, compte tenu de tous les risques quantifiables*, ainsi que l'incidence nette des techniques d'atténuation des risques. Le Capital de Solvabilité Requis est calculé au moins une fois par an, contrôlé en continu et recalculé dès que le profil de risque de l'entreprise varie sensiblement. Il est couvert par un montant équivalent de fonds propres éligibles (voir article 100).

Les modèles de calcul proposés pour les risques de marché et les risques d'assurance vie sont relativement complexes à mettre en œuvre notamment pour les petites et moyennes structures. Mais, de façon générale, l'appréciation du risque et du besoin de fonds propre à partir d'un critère de *VaR*, appliqué à un horizon court plutôt qu'à celui de l'échéance des contrats va modifier le comportement des assureurs.

Ce modèle général est décliné dans une formule standard proposée par les autorités de contrôle, dont la version 2010 est QIS 5. Son paramétrage conduit à tester des chocs d'ampleur de l'ordre d'un écart type. Il fournit également le cadre conceptuel des modèles internes que peuvent développer les assureurs.

II. LA MESURE DES RISQUES DANS SOLVABILITE II

1. FORMULE STANDARD

Les articles 103 à 109 décrivent les objectifs, l'architecture et le calibrage global de la formule standard de calcul de solvabilité requis. L'architecture dite modulaire, fondée sur des techniques d'agrégation linéaire, est précisée davantage dans l'annexe IV de la directive. Les standards sont définis aux articles 13, 104, 105 et 106 (le sous-module « Risque sur actions » est au 105-5.b et au 106). Parce qu'elles sont susceptibles d'évoluer dans le temps, les spécifications propres à ces modules et sous-modules seront adoptées par le biais de mesures d'exécution.

La formule standard de calcul du Capital de Solvabilité Requis s'efforce de trouver le juste équilibre entre sensibilité aux risques et considérations pratiques. Elle autorise à la fois l'utilisation de paramètres propres à l'entreprise dans les cas appropriés (voir article 104, paragraphe 7) et certaines simplifications standards pour les PME (voir article 108).

Étant donné que les nouvelles normes d'évaluation tiennent compte de la qualité de crédit et de la liquidité des actifs, que le Capital de Solvabilité Requis prend en compte tous les risques quantifiables et que tous les investissements sont soumis au principe « de la personne prudente », pas plus *les limites quantitatives restreignant les investissements que les critères d'éligibilité des actifs ne seront maintenus*. Cependant, si de nouveaux risques non couverts par la formule standard apparaissent avec l'évolution du marché, l'article 111, paragraphe 2, habilite la Commission à prendre des mesures d'exécution temporaires fixant des limites d'investissement ainsi que des critères d'éligibilité des actifs pendant qu'est mise à jour la formule.

L'article 110 bis précise les cas où l'autorité de contrôles juge que les hypothèses de la formule standard ne sont pas appropriées et que d'autres hypothèses doivent être retenues pour le calcul du SCR.

En pratique, le modèle standard est mis à disposition des assureurs sous forme de tableaux intégrant de nombreuses hypothèses tant théoriques que numériques. Pendant toute la procédure de mise en place de la directive, il a été demandé aux assureurs de calculer les fonds propres requis suivant les versions successives du modèle standard. Il apparaît que le risque lié aux placements, qui était ignoré dans les règles prudentielles précédentes est dominant, c'est un élément fondamentale pour expliquer l'impact qu'a une gestion sous contrainte de SCR sur les performances futures.

La prédominance de ce risque est l'une des raisons pour lesquelles l'industrie française a réagi négativement au projet Solvabilité II, car il pénalisait fortement les actions. Il a alors été avancé qu'il fallait tenir compte de l'horizon des engagements (à la différence des banques) car l'activité d'assurance concernait le long terme. Cette approche a été contestée mais cette question est actuellement en débat.

2. LE MODELE STANDARD PROPOSE PAR LE QIS 5

Le modèle de calcul de l'exigence de capital vise à quantifier chaque élément de risque. Il se fonde sur l'hypothèse d'une poursuite de l'activité de l'entreprise concernée (principe de

continuité d'exploitation). Il concerne différents domaines de l'activité des organismes d'assurance :

- les risques liés aux évolutions des marchés financiers ;
- le risque lié à l'activité vie ;
- le risque lié à l'activité non-vie ;
- Le risque lié à l'activité santé ;
- le risque de crédit ;
- le risque opérationnel.

Pour chaque domaine, le modèle propose de calculer le capital nécessaire pour faire face à différents risques identifiés. L'exigence de capital finale correspond à une agrégation des montants obtenus à l'aide de matrices de corrélations données.

Cette exigence de capital correspond à la *Value-at-Risk* des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de **99,5 % à l'horizon d'un an** (article 101 de la directive).

Le surplus (*Net Asset Value*) est défini comme la valeur de marché de l'actif diminué de la provision *best estimate* et de la *risk margin*.

La définition de la provision *best estimate* dans la directive Solvabilité II est la suivante :

« La **meilleure estimation** correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésoreries), estimée sur la base de la courbe des taux pertinente ».

« La marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques soit équivalente au montant dont les entreprises d'assurance et de réassurance auraient besoin pour reprendre et honorer des engagements d'assurance et de réassurance ».

Le principe posé par la directive est que l'exigence de capital (*SCR*) doit permettre d'absorber une perte probable (*Value-at-Risk*) au niveau de confiance de 99,5 % de la variation de ce surplus (ΔNAV) dans un an. C'est à dire que le surplus doit rester positif dans 99,5% des cas.

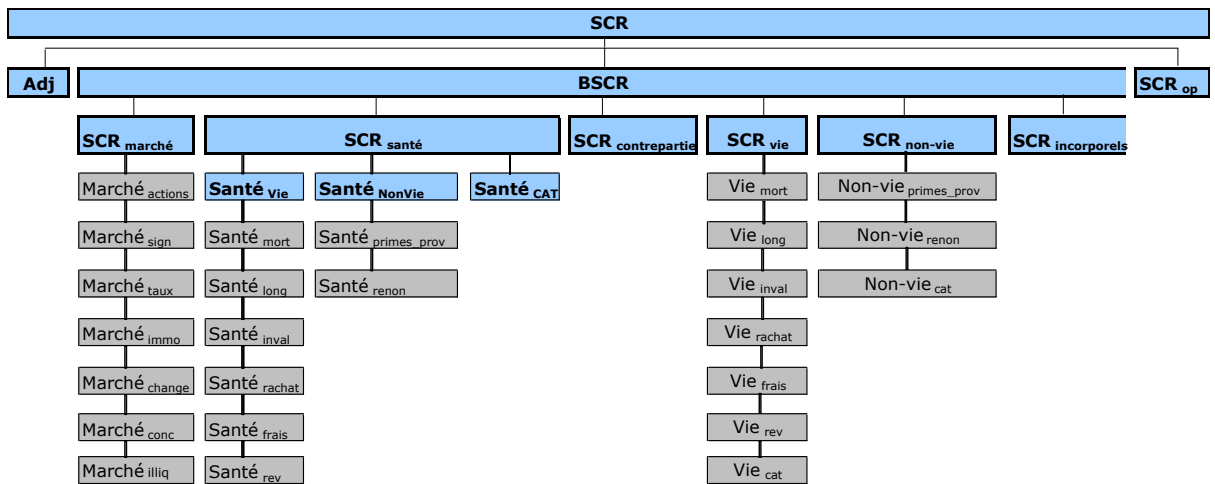
La formule standard de calcul du SCR est la suivante :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op} \quad (58)$$

Où :

- *BSCR* est le capital de solvabilité requis de base,
- *Adj* est l'ajustement pour les effets d'atténuation des risques provenant de la participation aux bénéfices et des impôts différés,
- *SCR_{op}* est le capital requis pour le risque opérationnel

La figure ci-dessous présente l'architecture de la prise en compte des risques dans le calcul du SCR selon le QIS 5.



- Le BSCR représente le SCR de base. Il mesure le besoin en capital des 6 modules de risques (souscription non-vie, marché, crédit, santé, souscription vie, actifs incorporels). Pour le calcul du BSCR, on a besoin de calculer le montant de capital requis correspondant à six types de risques, soit respectivement :
 - **SCRnon-vie** : le capital requis pour le risque lié à l'assurance non-vie,
 - **SCRmarché** : le capital requis pour le risque de marché,
 - **SCRcred.** : le capital requis pour le risque de crédit,
 - **SCRsanté** : le capital requis pour le risque lié à l'assurance santé,
 - **SCRvie** : le capital requis pour le risque lié à l'assurance vie,
 - **SCRincorporels** : le montant total des provisions techniques correspondant aux participations aux bénéficiaires futures
 - **nSCRmarché** : le capital requis pour le risque de marché incluant les effets d'atténuation des risques des PB futures,
 - **nSCRcred.** : le capital requis pour le risque de crédit incluant les effets d'atténuation des risques des PB futures,
 - **nSCRsanté** : le capital requis pour le risque lié à l'assurance santé incluant les effets d'atténuation des risques des PB futures,
 - **nSCRvie** : le capital requis pour le risque lié à l'assurance vie incluant les effets d'atténuation des risques des PB futures

Chaque montant est calculé à partir des risques individuels (risque actions, risque de mortalité, ...) : pour chacun, un modèle donné permet de calculer un besoin en capital représentatif du risque. Les besoins des risques individuels d'un même module sont agrégés en appliquant une matrice de corrélation tenant compte des interactions pouvant exister en situation de stress.

Le BSCR est calculé en appliquant une **matrice de corrélation** aux besoins calculés pour chaque module.

$$BSCR = \max \left(\sqrt{\left(\sum_{i,j} Corr_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j \right)} \right) + SCR_{incorporel} \quad (59)$$

où

- **SCR_r** : capital requis pour le risque r
- **CorrSCR_{ij}** : coefficients de la matrice de corrélation entre le risque *i* et le risque *j* :

	SCR _{marché}	SCR _{créd}	SCR _{vie}	SCR _{santé}	SCR _{non-vie}
SCR _{marché}	1				
SCR _{créd}	0,25	1			
SCR _{vie}	0,25	0,25	1		
SCR _{santé}	0,25	0,25	0,25	1	
SCR _{non-vie}	0,25	0,5	0	0,25	1

2.1. EFFET D'ABSORPTION PARTIELLE DES CHOCS FINANCIERS PAR LE PASSIF

Pour chaque facteur de risque (action, taux d'intérêt, volatilité,...) le SCR correspondant se calcule en mesurant l'impact du choc correspondant sur la « *Net-Asset-Value* », c'est-à-dire sur la valeur de marché de l'actif moins la « *fair value* » du passif.

L'organisme assureur doit mesurer l'impact du choc simultanément sur l'actif et sur le passif.

En assurance non-vie, le passif ne dépend des variables financières qu'au travers des taux d'intérêt servant à l'actualisation des flux futurs. Il suffit donc d'actualiser les flux futurs avec la courbe des taux translatée (à la hausse et à la baisse) pour le calcul du SCR « taux » (Marché_{taux}).

En assurance vie, le calcul est plus complexe car il faut tenir compte de l'absorption partielle par le passif des chocs financiers au travers des participations bénéficiaires futures. Dans le cas d'une détérioration de l'actif la distribution de PB ne sera pas la même pour les assurés.

Dans le cas de l'assurance santé, nous pouvons considérer que l'interaction entre l'actif et le passif sont négligeables, le passif étant court par rapport à l'actif.

2.2. PRINCIPE DE L'APPROCHE PAR TRANSPARENCE

Le texte du QIS 5 précise que pour le calcul du SCR_{marché} les OPCVM doivent être traités par transparence : les différents chocs doivent être appliqués aux actifs à l'intérieur du fonds.

Dans le cas de fonds de fonds, le traitement par transparence sera également appliqué au fonds sous-jacent.

Si le reporting de l'OPCVM n'est pas suffisamment détaillé pour effectuer ce traitement par transparence, le calcul du SCR_{marché} doit être effectué en se basant sur les limites d'investissement précisées dans la notice de l'OPCVM. On supposera alors que le fonds sature ces limites de sorte que le SCR obtenu soit maximum (par exemple : si un fonds peut investir entre 10% et 40% en actions, on fera l'hypothèse qu'il est investi à 40% en actions).

En dernier ressort (si on manque d'information sur la nature de l'investissement, on appliquera la pondération maximum c'est-à-dire le choc actions).

2.3. LE CALCUL DE L'EXIGENCE DE CAPITAL CIBLE (SCRMARCHE)

Dans notre étude nous nous intéresserons uniquement à l'impacte d'une gestion de l'actif sous une contrainte portant sur le *SCRmarché*, et plus précisément au risque action et risque de taux. Nous présentons dans cette section le modèle relatif au calcul du *SCRmarché*. Nous présentons uniquement le SCR_{action} et le SCR_{Taux}

2.3.1. LE RISQUE DE TAUX D'INTERET (MARCHE_{TAUX} OU MKTAUX)

Le risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux changements de taux d'intérêt.

Les actifs concernés sont les investissements à revenu fixe (obligations et OPCVM obligataires), les instruments de financement (capital d'emprunt), les produits dérivés de taux d'intérêt, ... Tous les actifs sont pris en compte, même ceux qui ne font pas face à des provisions.

L'actualisation des provisions techniques aux taux du marché rend ces éléments sensibles au taux. Les provisions techniques interviennent donc dans la détermination du besoin de capital.

Le principe est de calculer la valeur des actifs nette des passifs dans l'hypothèse d'une modification de la totalité de la courbe des taux à partir d'évolutions à la hausse et à la baisse par maturité des flux.

$$\text{Marché}_{\text{taux}}^{\text{hausse}} = \Delta NaV | \text{choc à la hausse} \quad (60)$$

$$\text{Marché}_{\text{taux}}^{\text{baisse}} = \Delta NaV | \text{choc à la baisse} \quad (61)$$

où :

- $\text{Marché}_{\text{taux}}^{\text{hausse}}$ et $\text{Marché}_{\text{taux}}^{\text{baisse}}$ sont calculés en supposant que les taux de participation aux bénéfices restent inchangés dans les scénarios de hausse ou de baisse considérés
- NaV est la valeur des actifs nette des passifs

L'ajout d'un choc de volatilité des taux d'intérêt qui avait été envisagé dans les Consultations Papers et dans le draft du 15 avril 2010 n'a finalement pas été retenu.

Les chocs relatifs à la hausse et à la baisse des taux sont les suivants :

Maturité t	0,25	0,5	1*	2	3	4	5	6	7	8
Variation relative (t) Choc à la hausse	70%	70%	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%
Variation relative (t) Choc à la baisse	-75%	-75%	-75%	-65%	-56%	-50%	-46%	-42%	-39%	-36%

Maturité t	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Variation relative (t) Choc à la hausse	44%	42%	39%	37%	35%	34%	33%	31%	30%	29%
Variation relative (t) Choc à la baisse	-33%	-31%	-30%	-29%	-28%	-28%	-27%	-28%	-28%	-28%

Maturité t	19	20	21	22	23	24	25	30 et plus
Variation relative (t) Choc à la hausse	27%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	25%
Variation relative (t) Choc à la baisse	-29%	-29%	-29%	-30%	-30%	-30%	-30%	-30%

Pour le calcul de la réduction des risques pour la participation aux bénéfices en assurance-vie, deux calculs sont à effectuer, l'un supposant des taux de participation constants et l'autre supposant une possibilité de modifier les taux de participation.

2.3.2. LE RISQUE SUR LES ACTIONS (MARCHE_{ACTIONS})

- Le risque sur les actions résulte de la volatilité des prix de marché des actions. L'exposition à ce risque se rapporte à tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux changements de prix des actions. Le module Marché_{actions} vise à mesurer le risque systématique actions, tandis que le risque lié à une mauvaise diversification du portefeuille actions est pris en compte dans le risque de concentration. Depuis le QIS4, la structure du module Marché_{actions}

* Pour illustration, un taux d'intérêt de maturité un an égal à 0,80% passe à 1,36% après un choc à la hausse de 0,70 et à 0,20% après un choc à la baisse de -0,75.

a significativement évolué. Il existe deux façons de calculer l'exigence de capital pour le risque sur les actions :

- L'approche standard ;
- Une méthode alternative tenant compte de la durée du passif (« Duration Based »).

Nous ne décrivons, compte tenu de l'application qui en sera faite dans notre étude, uniquement l'approche standard.

Le modèle est basé sur deux indices et suppose que toutes les actions ont la même exposition au risque que l'un de ces indices, en termes de volatilité et de corrélations ($\beta = 1$).

Les deux indices pris en compte sont les suivants :

1	Global
2	Autres

L'indice 'Autres' désigne les actions des marchés émergents, les actions non cotées, les investissements alternatifs, ...

L'ajout d'un choc de volatilité des actions qui avait été envisagé dans les Consultations Papers et dans le draft du 15 avril 2010 n'a finalement pas été retenu.

Etape 1. Stress sur le niveau des actions pour chaque indice

Le besoin en capital alloué à l'indice i est mesuré par la relation :

$\text{Marché}_{actions,i} = \text{Max}(\Delta NaV | \text{choc action indice } i ; 0)$, où le choc pour l'indice i est défini par une baisse de l'indice de :

	Indice	Choc avant effet d'« ajustement symétrique »
1	Global	39%
2	Autres	49%

Ces chocs sont modulés par un effet d'« **ajustement symétrique** ». L'ajustement symétrique est fonction du niveau actuel d'un indice et la moyenne pondérée de ce même indice calculée sur **3 ans**.

Ce mécanisme d'ajustement est limité. Il ne peut entraîner une augmentation ou une diminution de plus de 10 points des chocs sur les actions :

- le choc actions « global » peut varier entre 29% et 49% par ce mécanisme
- le choc actions « autres » peut varier entre 39% et 59% par ce mécanisme).

À fin 2009, ce mécanisme d'ajustement symétrique conduit à un facteur correctif de -9% (qui s'explique par le fait que les marchés sont aujourd'hui à un niveau plus bas que leur niveau moyen sur les trois dernières années).

Les chocs à appliquer pour le QIS 5 sont donc les suivants :

	Indice	Choc après effet d'« ajustement symétrique »
1	Global	30%
2	Autres	40%

Selon le CEIOPS, le but du mécanisme d'ajustement symétrique est de limiter **la procyclicité de la directive** :

- *« d'éviter que les entreprises d'assurance et de réassurance ne soient indûment forcées de lever des capitaux supplémentaires ou de céder leurs placements en raison d'une évolution temporairement défavorable des marchés financiers ;*
- *de décourager / éviter les ventes paniques (« fire sales ») qui aurait un impact fortement négatif sur le cours des actions - c'est-à-dire d'éviter un effet pro-cyclique qui en temps de crise augmenterait les exigences de fonds propres et qui potentiellement déstabiliserait l'économie ».*

Etape 2. Agrégation – Calcul du besoin en capital

Le besoin en capital $\text{Marché}_{\text{actions}, \text{niv}}$ est obtenu en appliquant une matrice de corrélation à la matrice $\text{Marché}_{\text{actions}, i}$

Les corrélations à prendre en compte sont les suivantes :

Indice	Global	Autres
Global	1	0,75
Autres	0,75	1

Etape 3. Réduction des risques générée par la participation aux bénéfices

En assurance-vie, il doit être effectué deux calculs : l'un supposant des taux de participation aux bénéfices constants et l'autre supposant des taux de participation ajustés.

2.4. AGREGATION DES RISQUES DE MARCHE : CALCUL DU $\text{SCR}_{\text{MARCHE}}$

Le modèle standard combine les différents risques de marché à partir d'une formule de composition des variances. Ce calcul correspond à des hypothèses implicites très fortes :

Chaque facteur de risque est représenté par une loi normale, ces facteurs de risque sont soit indépendants (action/ taux dans le cas d'une hausse des taux), soit dépendants linéairement (matrice de corrélation fixe). Le risque total se distribue alors suivant une loi normale et peut être entièrement mesuré par un écart-type.

Les besoins en capitaux calculés pour chaque risque sont agrégés à partir de matrices de corrélation données.

$$SCR_{\text{marché}} = \max \left(\sqrt{\sum_{r,c} Corr_{r,c}^{\text{hausse}} \times \text{Marché}_r^{\text{hausse}} \times \text{Marché}_c^{\text{hausse}}}; \sqrt{\sum_{r,c} Corr_{r,c}^{\text{baisse}} \times \text{Marché}_r^{\text{baisse}} \times \text{Marché}_c^{\text{baisse}} \right)$$

La matrice de corrélation pour les scénarios de baisse des niveaux de taux d'intérêt :

	Taux	Actions	Immobilier	Signature	Change	Concentration	Prime d'illiquidité
Taux	1						
Actions	0.5	1					
Immobilier	0.5	0.75	1				
Signature	0.5	0.75	0.5	1			
Change	0.25	0.25	0.25	0.25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Prime d'illiquidité	0	0	0	-0.5	0	0	1

La matrice de corrélation pour les scénarios de hausse des niveaux de taux d'intérêt :

	Taux	Actions	Immobilier	Signature	Change	Concentration	Prime d'illiquidité
Taux	1						
Actions	0	1					
Immobilier	0	0.75	1				
Signature	0	0.75	0.5	1			
Change	0.25	0.25	0.25	0.25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Prime d'illiquidité	0	0	0	-0.5	0	0	1

III. SOLVABILITE II : UNE NECESSITE PERFECTIBLE

1. LA NECESSITE D'UNE REFORME DU SYSTEME DE SOLVABILITE ACTUEL

Les règles européennes actuelles de calcul de la solvabilité des compagnies d'assurance dites Solvabilité I remontent aux années 70 et se caractérisent par leur simplicité puisque les exigences de fonds propres sont forfaitairement proportionnelles aux volumes d'affaires souscrites, primes émises en assurances non-vie et provisions mathématiques en assurance-vie. Au fil des années ont été mises en évidence quelques conséquences paradoxales de ces règles liées à leur caractère trop rigide.

Ainsi, une société d'assurance dommage en capacité d'augmenter ses tarifs – et donc ses marges et sa solvabilité future – à niveau de risque constant voit son exigence de fonds propres augmenter. De même, une compagnie d'assurance vie provisionnée de manière

prudente a une exigence de marge supérieure à une compagnie sous-provisionnée. Il n'est pas tenu compte du risque propre des actifs qui est incorporé dans les coefficients appliqués aux engagements. Seules sont imposées une règle de dispersion des actifs (pas plus de 5 à 10 % par contrepartie) et, selon les pays, des plafonds d'investissement en fonction de la nature de l'actif de façon à limiter les investissements dans les actifs les plus risqués.

Ces inefficacités majeures rendent absolument nécessaire une réforme de la solvabilité des compagnies d'assurance et de réassurance. Le projet Solvabilité II, demande aux sociétés d'assurance et de réassurance de prendre en compte l'ensemble de leurs risques, leurs engagements au passif comme leurs investissements à l'actif. Ce faisant, Solvabilité II impose une vision complète et englobante de l'ensemble des risques des sociétés d'assurance ou de réassurance. C'est en ce sens que l'approche proposée par Solvabilité II peut être qualifiée de « *risk based* », ce qui constitue un progrès réel par rapport à Solvabilité I.

2. LES PROBLEMES SOULEVES PAR SOLVABILITE II

Si Solvabilité II doit être mise en œuvre, il n'en demeure pas moins que cette réforme reste perfectible. D'une part, elle reste incomplète ou ne va pas assez loin sur de nombreux points. D'autre part, même si elle répond à nombre de préoccupations issues de la crise actuelle, il n'en demeure pas moins qu'elle n'en tire pas, ou pas assez, certaines leçons pourtant évidentes à ce stade.

2.1. LA VAR UNE MESURE DE RISQUE DEFICIENTE

Les nouvelles structures de gestion se dessinent dans les banques, les sociétés d'assurance et les fonds d'investissement, avec la mise en application de Bâle II, de Solvabilité II et de la directive européenne UCITS III. La gestion des risques est devenue un sujet majeur pour les chercheurs, les professionnels et les régulateurs. La *VaR* est une des mesures de référence pour l'estimation du risque extrême de marché. Elle est définie comme la perte potentielle que peut subir un portefeuille sur une période et pour un niveau de confiance donnés. Formellement, il s'agit de trouver le quantile associé à un niveau de probabilité tel que :

$$\text{Prob}(r_t < -VaR_{\alpha,t}) = 1 - \alpha$$

où r_t est la variable aléatoire des rendements de l'actif ou du portefeuille calculée pour une périodicité donnée, et α est le niveau de confiance.

Du fait de nombreuses critiques récemment formulées contre la généralisation de l'utilisation de la *VaR* (Cf. Cheridito et Stajje, 2009), l'intérêt se porte désormais sur l'ES. De plus, nous retiendrons que la *VaR* n'est pas une mesure de risque cohérente au sens d'Artzner et al. (1999), parce que notamment la *VaR* n'est pas de façon générale sous-additive. Une mesure de risque, noté ρ , est sous-additive si et seulement si, pour deux actifs A et B on a $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$. C'est un problème fondamental car cela implique que la *VaR* ne peut pas être considérée comme une mesure « propre » du risque rattachée à une théorie et un ensemble d'axiomes permettant de définir ce qu'est une mesure de risque.

L'ES correspond à la moyenne des rendements en dessous de la VaR estimée, pour une période et un niveau de confiance donné. Contrairement à la VaR, cette dernière mesure satisfait la propriété de sous-additivité. Plus formellement, l'ES peut s'écrire de la façon suivante (en utilisant les notations précédentes) :

$$ES_{\alpha,t} = -E[r_t | r_t \leq -VaR_{\alpha,t}]$$

Si nous considérons que la distribution des rendements est connue, nous avons :

$$ES_{\alpha,t} = -(1 - \alpha) \int_{-\infty}^{-VaR_{\alpha,t}} r_t f(r_t) dr_t ,$$

où $f(\cdot)$ est la fonction de densité de probabilité des rendements r_t .

Plusieurs approches sont utilisées pour estimer ces mesures de risque. Elles peuvent être regroupées en trois principales catégories : les méthodes paramétriques (ARCH, GARCH, RiskMetrics), les méthodes non paramétriques (Simulation Historique, Simulation de Monte Carlo, Weighted Historical Simulation) et les méthodes semi-paramétriques (CAViaR, théorie des extrêmes) (Cf. Engle et Manganelli, 1999).

L'approche paramétrique suppose que les rendements suivent une fonction de densité de probabilité définie, par exemple comme une distribution Normale ou t-Student. Les paramètres de la distribution sont ainsi spécifiés et la mesure de risque est alors déduite à partir des quantiles de la distribution estimée. Celle-ci dépend ainsi principalement des paramètres utilisés. Dans cette catégorie de mesures, celle issue de l'utilisation du modèle RiskMetrics est d'une utilisation très répandue.

Elle suppose que les rendements des actifs suivent une distribution Normale centrée avec une volatilité estimée par une moyenne mobile exponentielle sur données historiques. D'autres méthodes d'estimation de la volatilité (modèles GARCH, Skew-Student, NIG,...) sont aussi disponibles pour modéliser directement la densité (conditionnelle ou inconditionnelle) des rendements. Toutefois, ce type d'approche souffre principalement de problèmes liés à la spécification des densités supposées, qui ne permettent pas de rendre compte parfaitement des principaux faits stylisés des séries financières.

L'approche non-paramétrique ne nécessite aucune hypothèse explicite sur la distribution des rendements ; les calculs sont directement effectués sur les données observées. Celle-ci repose sur l'estimation empirique de la distribution des pertes possibles et leurs fréquences d'apparition en fixant un niveau de probabilité voulu. Le principal problème de cette approche concerne la définition de l'historique de données optimale pour l'estimation du quantile empirique : un historique trop court mènera à une erreur d'échantillonnage importante, alors qu'un historique trop important limitera les réactions de la mesure aux changements de régime des rendements.

Enfin, l'approche semi-paramétrique d'estimation de la VaR combine les deux précédentes approches. Les méthodes dites de Cornish-Fisher (fondées sur des expansions statistiques des densités de rendements autour d'une densité de référence) et celle des régressions sur quantiles font partie de cette famille. Cette dernière méthode d'estimation a pour avantage de ne nécessiter aucune hypothèse distributionnelle forte. La VaR autorégressive

conditionnelle (en anglais Conditional AutoRegressive Value-at-Risk, ou CAViaR) introduite par Engle et Manganelli (2004), est définie ainsi directement à partir de quatre spécifications dynamiques autorégressives du risque.

Les calculs de Solvabilité II, que ce soit dans le cadre de la formule standard ou des modèles internes, se structurent autour de la *VaR*, qui est censée donner la mesure des pertes qu'un événement ou une combinaison d'événements est susceptible d'infliger à une compagnie avec une probabilité déterminée. Plus cette probabilité est élevée, plus il faut mettre de côté un capital suffisant pour absorber des chocs de plus en plus extrêmes. L'approche en termes de *VaR*, qui est reprise de Bâle II, présente l'intérêt non seulement d'inciter les sociétés à prendre la mesure de l'ensemble de leurs risques mais aussi de le faire d'une façon rigoureuse et cohérente. En effet, la *VaR* se calcule pour un niveau donné de probabilité de survie. C'est ce niveau de probabilité de survie qui assure que les différents risques sont mesurés selon la même métrique et qu'ils peuvent donc être agrégés pour obtenir une *VaR* cohérente de la société.

Paradoxalement, malgré sa sophistication, la méthode de la *Value-at-Risk* est une mesure du risque dont les limites ont été mises en évidence. De manière synthétique, pour être cohérente, une mesure du risque (l'évaluation d'un besoin de capital) doit satisfaire quatre propriétés :

- elle doit être invariante par translation : pour un portefeuille de risques donné, l'adjonction (ou le retrait) d'un montant de capital donné investi dans un actif sans risque diminue (ou augmente) d'autant le capital requis.
- elle doit être homogène : pour un portefeuille de risques donné, si chacun des risques individuels augmente ou diminue dans la même proportion, le capital requis doit augmenter ou diminuer de manière corrélée.
- elle doit être monotone : si un portefeuille de risques présente un niveau de risque supérieur à celui d'un autre, le capital requis pour le premier doit être supérieur à celui du second.
- elle doit être sous-additive : le capital requis pour l'addition de deux portefeuilles de risques doit être inférieur ou égal à la somme des capitaux requis pour chacun des portefeuilles du fait de la corrélation qui peut exister entre les deux portefeuilles.

Cette dernière propriété est essentielle pour la mesure des risques d'un portefeuille d'assurance car elle reflète le gain de diversification. Or, en l'espèce, la *Value-at-Risk* n'est pas sous additive sauf dans des cas particuliers (les lois de distribution normales ou, plus généralement, elliptiques).

L'utilisation de cette mesure de risque pourrait donc conduire à l'aberration que, dans certains cas, le capital requis après agrégation de deux portefeuilles pourrait être supérieur à la somme des capitaux requis pour chacun des portefeuilles ou, à l'inverse, que pour diminuer le risque, il pourrait être opérant de scinder une compagnie d'assurance en deux compagnies distinctes. Mais la *Value-at-Risk* présente un autre défaut majeur : elle sous-estime le capital requis pour faire face aux situations extrêmes. La raison en est qu'elle détermine le besoin de capital qui permet de combler des pertes dans une certaine

proportion de cas, par exemple 99,5 % des cas. Mais elle n'évalue en aucune manière l'ampleur des pertes au-delà du seuil. Ainsi, la perte à combler dans les 0,5 % de cas extrêmes est en moyenne supérieure au besoin de capital permettant d'éviter la faillite dans 99,5 % des cas. Ce phénomène est renforcé par l'hypothèse de stationnarité des hypothèses qui sous-tendent les modèles mathématiques et statistiques. Contrairement aux lois de la physique qui sont immuables, les modèles qui tentent de décrire l'économie et la finance ne sont pas robustes parce que le comportement des agents économiques évolue en fonction de la conjoncture. Ainsi, on observe en temps de crise une augmentation très forte des corrélations entre actifs financiers.

2.2. INADEQUATION DES PARAMETRES DE CALIBRATION

Au-delà de ces objections théoriques, les paramètres retenus dans la formule standard pour calibrer l'exigence de fonds propres sont inadaptés. Pour chaque mesure de risque, il convient en effet de spécifier deux paramètres essentiels : l'horizon de modélisation et le seuil de confiance.

2.2.1. LE SEUIL DE CONFIANCE

Le seuil de confiance est la probabilité que le montant des pertes ne dépasse pas l'exigence de capital déterminée par la mesure de risque. Du point de vue de la régulation, le seuil de confiance est la probabilité qu'une compagnie ne fasse pas faillite. Le projet de directive Solvabilité II a retenu un seuil de 99,5 %, ce qui signifie que tant qu'une société couvre son exigence de fonds propres, sa probabilité de faillite est limitée à 0,5 %. Mais il s'agit donc d'estimer l'événement susceptible de ne toucher chaque compagnie d'assurance qu'une fois tous les deux cents ans. Il va de soi qu'en absence d'historiques de données sur une telle durée, ces estimations sont dans une très large mesure le résultat de conjectures.

2.3. L'HORIZON DE PROJECTION

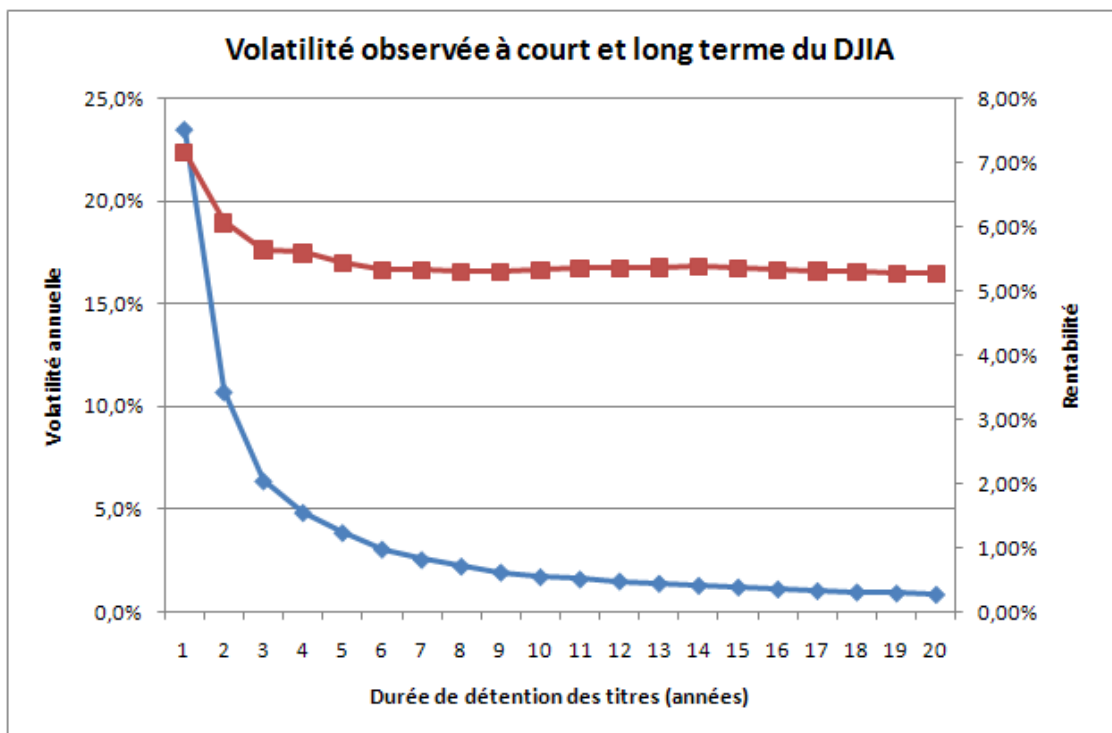
La longueur de l'horizon dépend donc étroitement de la nature du sous-jacent dont on veut mesurer le risque. Dans les banques, le risque de marché est évalué sur une durée très courte (un jour), le risque de crédit sur des durées plus longues (de quelques mois à quelques années). Dans l'assurance, si l'on veut que la mesure de la solvabilité d'une compagnie d'assurance exprime de manière pertinente sa capacité à faire face à ses engagements, l'horizon devrait varier considérablement en fonction des contrats (de quelques semaines pour les risques à déroulement court à plusieurs décennies pour les risques à déroulement long). Pourtant, par simplification et par homogénéité avec ce qui avait été retenu pour le système bancaire, l'horizon de modélisation retenu pour la formule standard de calibration des exigences de fonds propres a été fixé à un an.

En adoptant cet horizon d'un an, on est passé d'un excès à l'autre. Alors que les règles de Solvabilité I surévaluaient l'exigence de fonds propres des risques à déroulement court et sous-évaluaient celle des risques à déroulement long, la formule standard de Solvabilité II

sous-évalue le besoin de capital des risques courts et surévalue de manière dissuasive les risques longs.

Même si Solvabilité II constitue un important progrès dans la proportionnalité des exigences en capital à la réalité des risques sous-jacents, il n'en demeure pas moins que la calibration de nombreuses exigences demeure disproportionnée par rapport aux risques qu'elles sont censées couvrir. Les exigences en capital de Solvabilité II paraissent particulièrement disproportionnées en matière d'actifs, en ce qui concerne notamment les actions.

L'idée de mesurer le risque des portefeuilles d'actions détenus par les assureurs en se référant à la volatilité annuelle des actions conduit en effet à des exigences excessives dès lors que les actions couvrent soit des engagements de long terme (retraite, dépendance, invalidité), soit des fonds propres, lesquels sont destinés à absorber des chocs extrêmes, c'est-à-dire des risques à très faible fréquence et coût élevé, qui sont par définition des risques à temporalité longue. De fait, la volatilité à long terme de portefeuilles d'actions correctement diversifiés est systématiquement et substantiellement plus faible que leur volatilité à court terme, comme le montre le graphique ci-dessous.



Cette particularité des actions est imputable au comportement de retour vers la moyenne qui caractérise les actions. Sachant que les actions couvrent des passifs longs, leur chargement en capital devrait être calibré en fonction de leur volatilité de long terme, voire de très long terme, et non en fonction de leur volatilité de court terme. Ceci a une conséquence importante pour la gestion des risques en assurance. Le portefeuille optimal d'un assureur n'est pas le même selon qu'il souscrit des engagements courts ou longs : il doit comporter une proportion plus importante d'actions et moins importante d'obligations dans ce dernier cas. De même, il n'est pas le même selon qu'il souscrit des risques à fréquence

élevée et coût faible ou des risques à fréquence faible et coût élevé : il doit comporter une proportion plus importante d'actions et moins importante d'obligations dans ce dernier cas. Solvabilité II en imposant des exigences en capital trop élevées sur les actions placées en couverture de risques longs ou de fonds propres, distord profondément le portefeuille d'actifs des compagnies concernées : elle incite celles-ci à une allocation sous-optimale de leurs actifs qui les surexpose au risque de taux d'intérêt.

2.4. PROCYCLICITE

La procyclicité. Ce terme définit les fluctuations excessives d'un facteur aux variations du cycle économique. Ainsi, pour un ratio de solvabilité sensible au risque comme celui de Bâle II, la procyclicité correspond à une variabilité accrue du niveau de besoins en fonds propres aux fluctuations économiques. Les exigences en capital évoluent de manière amplifiée à la hausse en cas de ralentissement et à la baisse en période de croissance.

Par nature, l'activité d'assurance devrait être contra-cyclique. Son rôle économique et social est d'atténuer les chocs adverses subis par les agents économiques qui ont fait l'effort de financer cette protection en période plus favorable. Elle doit être un facteur de stabilité. Or, autant Solvabilité I est contra-cyclique – les exigences de fonds propres augmentent dans les phases d'expansion et diminuent dans les phases de contraction – autant Solvabilité II recèle des mécanismes procycliques, les charges en capital augmentant en bas de cycle avec les probabilités de défaut.

Les standards de Solvabilité II restent trop procycliques, dans leur version actuelle. Or, la crise actuelle a bien mis en évidence les risques d'une régulation procyclique, qui incite à l'exubérance dans un premier temps, puis amplifient les crises quand elles ont éclaté dans un deuxième temps. On retrouve cette procyclicité un peu partout dans Solvabilité II. Elle est présente au niveau de l'usage prévu de la marge de solvabilité qui est conçue par Solvabilité II moins comme un coussin absorbant de chocs en cas de crise économique ou financière que comme un seuil déclencheur d'un contrôle plus ou moins serré des sociétés qui présentent un défaut de gestion. Ceci a pour conséquence d'accroître les incertitudes sur le futur des sociétés dans les situations de crise. De même, l'utilisation sans discernement des modèles internes peut conduire à une augmentation des exigences en capital sur les actifs quand ceux-ci voient leur volatilité s'accroître du fait de la chute des valeurs boursières.

La procyclicité de la directive Solvabilité II se retrouve à différents niveaux, aussi bien dans les standards comptables via la « *fair value* » et la « *market value* » que dans la mesure du risque au travers de la *VaR*.

Dans la section qui suit nous allons nous focaliser sur la procyclicité de la mesure de risque dans la formule standard. Nous tenterons d'apporter une vision quantitative du caractère procyclique présent dans le calcul de l'exigence en capital dans la directive Solvabilité II.

VI. LE $SCR_{MARCHÉ}$ UN CRITERE DE GESTION DU RISQUE PROCYCLIQUE

Nous souhaitons mesurer l'effet du contrôle de risques sur les performances futures, et plus précisément l'effet de l'exigence de fonds propres sous le modèle standard sur la distribution des performances futures.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au $SCR_{marché}$, l'exigence en fonds propres permettant de couvrir le risque de marché.

Nous présentons dans un premier temps les hypothèses faites et le calcul du $SCR_{marché}$ qui en découle. Nous présenterons, ensuite la stratégie d'investissement du gérant sous la contrainte du $SCR_{marché}$, ainsi que le modèle de simulation de l'actif. Nous concluons cette section par la présentation et l'analyse des résultats.

1. HYPOTHESES ET CALCUL DU $SCR_{MARCHÉ}$

Pour chaque facteur de risque (action, taux d'intérêt, volatilité,...) le SCR correspondant se calcule en mesurant l'impact du choc correspondant sur la « *Net Asset-Value* » (*NAV*), c'est-à-dire la valeur de marché de l'actif moins la « *fair value* » du passif.

En assurance non-vie, le passif ne dépend des variables financières qu'au travers des taux d'intérêt servant à l'actualisation des flux futurs. Il suffit donc d'actualiser les flux futurs avec la courbe des taux translatée (à la hausse et à la baisse) pour le calcul du SCR « taux » (SCR_{taux}).

En assurance vie, le calcul est plus complexe car il faut tenir compte de l'absorption partielle par le passif des chocs financiers au travers des participations bénéficiaires futures.

Le calcul de l'exigence de capital nécessite de calculer la variation de la valeur des actifs de taux et des passifs après des chocs à la hausse ou à la baisse des taux.

Nous considérons dans notre étude le cas d'un **assureur non-vie de type assureur santé**. L'échéancier du Passif d'un assureur santé est généralement court. On négligera l'impact des variations de taux sur la valeur du passif. Donc il n'y aura pas d'effet d'absorption par le Passif.

Pour un assureur santé, nous utiliserons le calibrage proposé dans les spécifications techniques du QIS 5 publié début Juillet 2010. Nous considérons dans notre étude uniquement deux classes d'actifs, une poche action et une poche obligation. Nous effectuerons une simplification dans le calcul du $SCR_{marché}$ où nous considérerons uniquement le risque action et le risque de taux (à la hausse compte tenu de la caractéristique du passif).

1.1. CALCUL DU SCR_{ACTION}

Pour le QIS 5, le SCR_{action} est calculé en appliquant un choc sur la valeur des actions sous-jacentes de 39%. Dans le cas où, le niveau des actions est inférieur à leur niveau moyen sur les trois dernières années, nous ajoutons au choc de base un effet d'« ajustement symétrique » de 9%.

Nous notons $x(t)$, le montant investi dans les obligations à l'instant t . Sous l'hypothèse d'un passif constant. Le $SCR_{actionc}$ est :

$$SCR_{action}(t) = 39\%(Actif(t)_{Av\ Choc} - x(t)) \quad (62)$$

1.2. CALCUL DU SCR TAUX

Le QIS 5 fournit pour chaque maturité les coefficients de variations relatives à appliquer au taux d'intérêt afin de déterminer le SCR_{taux} :

Maturité	1	2	3	4	5	6	7	8
Choc à la hausse	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%

Dans le cadre de notre étude, nous supposons que notre actif est sensible au taux 6 ans. Nous utilisons donc le choc de taux à la hausse pour une maturité de 6 ans, soit 52%.

Le SCR_{taux} s'exprime donc comme suit :

$$SCR_{taux}(t) = Sensibilité \times \tau_{6ans}(t) \times 52\% \times x(t)$$

Où

- *Sensibilité* est de 5
- $\tau_{6ans}(t)$ est le taux à 6 ans à l'instant t
- $x(t)$ le montant investit en obligation.

1.3. AGREGATION DES SCR

La matrice de corrélation qui sert à composer le SCR dans les spécifications techniques du QIS 5 de juillet 2010 est la suivante :

	Taux d'intérêt	Action	Spread	Prime d'illiquidité
Taux d'intérêt	1	0/0,5*	0/0,5*	0
Action	0/0,5*	1	0,75	0
Spread	0/0,5*	0,75	1	-0,5
Prime d'illiquidité	0	0	-0,5	1

*0/0,5 : Lorsque l'assureur est exposé à un risque de hausse des taux, le coefficient de corrélation qui sert à composer le SCR taux d'intérêt avec le SCR actions et le SCR signature est pris égal à 0. Lorsque l'assureur est exposé à un risque de baisse des taux, le coefficient

de corrélation qui sert à composer le SCR taux d'intérêt avec le SCR actions et le SCR signature est pris égal à 0,5.

Pour notre calcul, le passif de l'assureur n'est pas affecté par les chocs appliqués sur les taux, le seul risque de taux à prendre en compte est le risque de hausse des taux. Autrement dit, pour agréger les SCR, les chocs sur les taux et les chocs sur les actions sont supposées indépendants.

Ici, l'investisseur est exposé à un risque à la hausse des taux, le coefficient est donc pris égal à 0.

Le passif étant très court, le SCR de prime d'illiquidité est nul.

On supposera le portefeuille suffisamment diversifié pour que le SCR_{Concentration} soit nul.

De plus, le SCR_{spread} est de même considéré comme nul, car nous n'investissons que dans des obligations d'Etats membres de la communauté européenne.

Le SCR_{marché} est donc :

$$SCR_{marché}(t) = \sqrt{SCR_{taux}^2(t) + SCR_{action}^2(t)} \quad (63)$$

2. STRATEGIE D'INVESTISSEMENT DU GERANT

Chaque année, le gérant revoit son allocation de portefeuille en fonction de l'évolution du cours des actions et de l'évolution des taux. Le but étant de quantifier l'effet procyclique du SCR_{marché}, nous considérons donc une allocation de portefeuille fonction de ce critère. Le SCR_{marché} est un des risques pris en compte dans le calcul du SCR global. Nous devons donc émettre une hypothèse concernant le poids du risque de marché dans le risque global que supporte notre assureur santé.

Le risque de marché apparaît comme l'un des modules les plus importants de la formule standard. Le QIS 4 (et auparavant le QIS 2 et le QIS 3) a montré que le besoin de capital lié à ce risque représentait environ :

- **44% du besoin global en assurance non-vie** (49% dans le QIS 3 et 40% dans le QIS 2)
- **82% du besoin global en assurance vie** (75% dans le QIS 3 et 77% dans le QIS 2).

Dans notre étude nous supposons que le SCR_{marché} est couvert par 30% de la *Net Asset Value* (NaV). Nous obtenons une contrainte sur le SCR_{marché}, qui doit être vérifiée à chaque rebalancement du portefeuille. Cette contrainte est la suivante :

$$SCR_{marché}(t) \leq 30\% \cdot NaV(t) \quad (64)$$

De cette contrainte, nous pouvons déduire le montant à investir en obligation $x(t)$, ainsi que le montant à investir en action à chaque instant t .

Nous supposons que l'allocation maximale possible en action est bornée à 30% de l'actif. Dans la mesure du possible, le gérant tend à avoir une allocation cible de 30% en action et 70% en obligation.

Comme nous l'avons décrit dans la section précédente, le caractère procyclique du $SCR_{\text{marché}}$ réside dans le fait qu'il s'agit d'une variable qui fluctue dans le même sens que le cycle économique. En bas de cycle, le $SCR_{\text{marché}}$ va contraindre le gérant à diminuer son allocation en action en vendant ses actions alors qu'elles viennent de subir une forte décote. Le gérant ne pourra donc pas bénéficier d'un rebond du marché, ce qui accroît sa perte. En haut de cycle, le $SCR_{\text{marché}}$ va lui permettre d'augmenter son allocation en action, en achetant des actions qui viennent de voir leur valeur augmenter.

Afin de quantifier ce phénomène de procyclicité, nous mesurons l'écart de performance annualisé entre un actif géré en saturant la contrainte de $SCR_{\text{marché}}$ (64) et un actif ayant une allocation fixe (30% en action et 70% en obligation).

Nous mesurons de même l'écart de performance annualisé entre l'allocation faite sous contrainte de $SCR_{\text{marché}}$ (64) et une allocation dynamique contracyclique.

Cette allocation contracyclique se caractérise par une allocation tenant compte du cycle économique. En effet, en bas de cycle, nous augmenterons notre exposition en action en y allouant 40%. Nous considérons que nous nous trouvons en bas de cycle si la performance cumulée des actions est inférieure à -30%. En haut de cycle, nous diminuons l'exposition en action en y allouant 20%. Nous considérons que l'on se trouve en haut de cycle, lorsque la performance cumulée des actions est supérieure à 150%. Dans tout les autres cas, le gérant conserve une allocation de 30% en action.

3. MODEL DE SIMULATION DE L'ACTIF

3.1. MODELISATION DES ACTIONS

3.1.1. UTILISATION D'UNE LOI NORMALE POUR MODELISER LE CŒUR DE LA DISTRIBUTION

La performance annuelle des actions est générée à partir d'un modèle mixant une loi normale au cœur de la distribution, et des processus à sauts au niveau des queues de distribution qui traduisent le risque de krach boursier ou de forte hausse des actions. Ces processus sont calibrés de façon à ne pas sous-estimer le risque de perte. Ce calibrage s'appuie sur la densité historique reconstituée par la méthode des noyaux à partir de l'historique du CAC 40 depuis 1989.

Chaque année, il existe une faible probabilité $\lambda_t^{\text{baisse}}$ qu'un krach boursier se produise, dans ce cas la performance de l'année n'est pas tirée selon la loi normale du cœur de distribution mais selon une loi « de krach » centrée sur une performance négative. Il existe de même une faible probabilité $\lambda_t^{\text{hausse}}$ qu'une forte hausse des actions se produise, dans ce cas la performance de l'année n'est pas tirée selon la loi normale du cœur de distribution mais selon une loi « de saut à la hausse » centrée sur une performance très positive.

3.1.2. MODELISATION DES CYCLES BOURSIERS

L'évolution du cours des actions est marquée par des périodes alternées de hausses et de baisses. Les ruptures de ces tendances sont souvent les causes de facteurs exogènes tels qu'une hausse des taux d'intérêts, un krach boursiers, ...

Les cycles boursiers viennent influencer à la fois les probabilités de sauts à la hausse et à la baisse. Pour en tenir compte, on introduit une modulation des probabilités des deux types de sauts. Ainsi, la fin d'un cycle boursier haussier entraîne :

- Une hausse de la probabilité de sauts à la baisse ;
- Une baisse de la probabilité de sauts à la hausse.

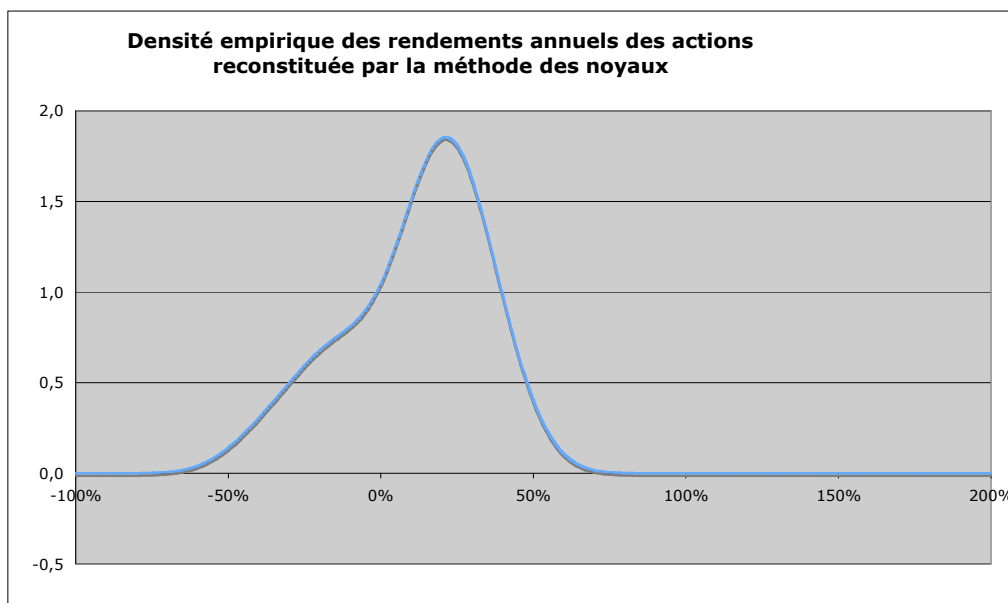
Tandis que la fin d'un cycle boursier baissier entraîne :

- Une baisse de la probabilité de sauts à la baisse ;
- Une hausse de la probabilité de sauts à la hausse.

Le modèle à saut considère qu'à chaque pas de temps il existe une faible probabilité qu'un saut à la baisse (resp. à la hausse) se produise. Si ce saut se produit, la performance n'est pas tirée selon la loi normale représentant le cœur de la distribution, mais selon la loi normale centrée sur un crash moyen (resp. une hausse moyenne).

3.1.3. LA PROJECTION EN PRATIQUE

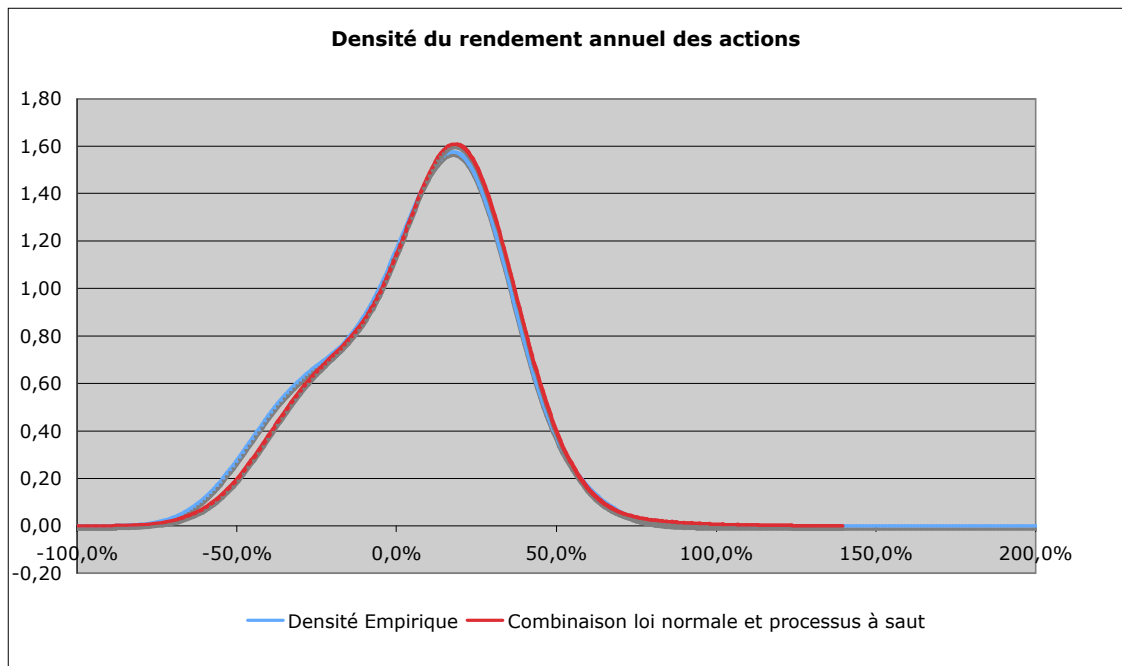
Les performances annuelles sont calculées à partir des cours de l'indice CAC40 dividendes réinvestis entre 1988 et 2009. La densité empirique reconstituée par la méthode des noyaux obtenue est la suivante :



Après avoir identifié les points d'inflexion de la densité empirique, on déduit les paramètres de la combinaison de lois normales suivants :

	Sauts à la baisse	Absence de saut	Sauts à la hausse
λ	27,7%	68,3%	4%
μ	-23,5%	18,9%	35%
σ	19%	18%	33,1%

Le graphique ci-dessous compare la densité empirique du rendement annuel des actions à la densité théorique du rendement annuel des actions obtenue par combinaison de lois normales.



On se base ici sur la comparaison des espérances, des variances et des Values-at-Risk pour juger de l'adéquation des deux distributions.

Critère	Distribution empirique (1)	Combinaison de lois normales (2)	Écart relatif (3) = $ (2)/(1)-1 $
Espérance	7,55%	7,70%	1,98%
Ecart-type	27,72%	29,09%	4,95%
VaR à 99,5%	-64%	-65%	2,18%
VaR à 99,0%	-59%	-60%	1,33%
VaR à 95,0%	-43%	-43%	0,18%
VaR à 90,0%	-33%	-33%	0,45%
VaR à 80,0%	-18%	-17%	3,14%
VaR à 20,0%	30%	29%	2,44%
VaR à 10,0%	40%	39%	3,68%
VaR à 5,0%	48%	46%	3,39%
VaR à 1,0%	63%	61%	3,21%
VaR à 0,5%	69%	66%	4,71%

Les 3 critères de comparaison offrent des résultats similaires pour les deux distributions. En effet, quel que soit le critère de comparaison, les écarts relatifs n'excèdent pas 5%.

3.2. MODELISATION DES TAUX NOMINAUX

3.2.1. DESCRIPTION DU MODELE

Tout comme pour les actions, de nombreux modèles mathématiques existent pour modéliser l'évolution des taux nominaux. Les taux nominaux ont la propriété d'être toujours positifs. Il fallait donc trouver un modèle qui ne génère pas de taux négatifs. Nous souhaitons aussi que notre modèle prenne en compte les effets de retour à la moyenne. Nous avons donc opté pour le modèle de Black Karasinsky à deux facteurs qui satisfaisait parfaitement à nos besoins. Ce processus est caractérisé par les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$\begin{aligned}d \ln(r_t) &= \alpha_1 (\ln(m_t) - \ln(r_t)) dt + \sigma_1 dW_t^1 \\d \ln(m_t) &= \alpha_2 (\mu - \ln(m_t)) dt + \sigma_2 dW_t^2\end{aligned}$$

où :

- W_t^1 et W_t^2 désignent deux mouvements browniens indépendants ;
- α_1 et α_2 correspondent à la vitesse de retour à la moyenne ;
- σ_1 et σ_2 correspondent aux volatilités du taux instantané et du taux moyen terme m ;
- $\ln(r_0)$ et $\ln(m_0)$ sont respectivement, le log du taux instantané initial et le log du taux moyen terme initial ;
- μ est la moyenne vers laquelle le taux long tend ;

Ces équations de diffusion nous permettent de simuler un grand nombre de trajectoires pour les taux court terme r_t et long terme m_t .

Malgré les nombreux avantages de ce modèle, ce dernier possède aussi un inconvénient de taille : il n'existe pas de solution analytique pour le calcul du prix des obligations zéro-coupons, et donc des courbes de taux, ce qui entraîne une explosion des temps de calculs des courbes des taux.

En effet, supposons que nous souhaitons obtenir 10 000 scénarios de taux. Nous effectuons donc 10 000 simulations pour obtenir ces scénarios. Puis, pour obtenir la valeur des taux à un an dans un an, il faut effectuer de nouveau 10 000 simulations, et ceci pour chaque scénario. Nous effectuons ainsi 10 000 x 10 000 simulations pour n'obtenir que les taux à un an dans un an. Il est donc inconcevable de calculer des courbes de taux entières (sur 20 ou 30 ans) pour chaque pas de temps et pour chaque scénario.

3.2.2. PRIX ZERO-COUPONS ET COURBE DES TAUX

Pour pallier ce problème, il a été décidé de calculer le prix des obligations zéro-coupons à l'aide de la formule analytique du modèle de Vasicek à deux facteurs. Cette formule, qui

permet le calcul à une date t du prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T , est la suivante :

$$P(t, T) = \exp[A(T-t) - B_1(T-t)r_t - B_2(T-t)m_t]$$

où

$$B_1(s) = \frac{1 - e^{-\alpha_1 s}}{\alpha_1}$$

$$B_2(s) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\frac{1 - e^{-\alpha_2 s}}{\alpha_2} - \frac{1 - e^{-\alpha_1 s}}{\alpha_1} \right]$$

$$A(s) = (B_1(s) - s) \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2\alpha_1^2} \right) + B_2(s) \mu - \frac{\sigma_1^2 B_1(s)^2}{4\alpha_1} + \frac{\sigma_2^2}{2} \left[\frac{s}{\alpha_2^2} - 2 \frac{B_1(s) + B_2(s)}{\alpha_2^2} + \frac{1 - e^{-2\alpha_1 s}}{2\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)^2} - \frac{2\alpha_1(1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)s})}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_1^2(1 - e^{-2\alpha_2 s})}{2\alpha_2^3(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right]$$

Une fois le prix des zéro-coupons déterminés, il est alors possible de retrouver la courbe des taux par la formule suivante :

$$\tau(t, T) = - \frac{\ln(P(t, T))}{T - t}$$

Cette formule analytique de Vasicek n'est utilisée que pour calculer la courbe des taux à partir des niveaux de taux court terme r_t et de moyenne de long terme m_t préalablement générés par le modèle de Black Karasinski à deux facteurs pour les taux nominaux et le modèle de Vasicek à deux facteurs pour les taux réels.

Dès lors, nous pouvons très rapidement calculer les courbes des taux pour chaque scénario et ceci à chaque pas de temps.

3.2.3. CALIBRAGE DU MODELE

Le modèle de Black Karasinski à deux facteurs a été calibré à partir de la courbe des taux d'intérêts construite par l'Institut des Actuaire au 31/12/2009.

La méthode utilisée pour calibrer les modèles de courbes de taux consiste à minimiser l'écart quadratique entre la courbe des taux moyenne estimée et la courbe des taux de référence.

$$EQM = \min_{\alpha_1, \alpha_2, m_0, \mu} \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T [\tau^{\text{réf}}(t) - \tau(t, \alpha_1, \alpha_2, m_0, \mu)]^2}{T}} \quad (65)$$

Le calibrage se fait par itération, le but étant d'approcher au mieux la courbe initiale en modulant les différents paramètres des modèles.

L'algorithme de calibrage est simple, nous fixons les volatilités et le taux instantané initial et nous utilisons le solveur d'Excel pour estimer les paramètres μ et m_0 ainsi que les vitesses de retour à la moyenne α_1 et α_2 .

Au 31/12/2009, on obtient les paramètres suivants :

Paramètres	α_1	α_2	σ_1	σ_2	μ	r_0	m_0
Valeurs	22%	8%	0,50%	0,50%	4,50%	0,60%	6,30%

Nous avons ensuite comparé la courbe des taux estimée à l'aide du modèle de Black Karasinski avec la courbe des taux fournie par l'Institut des Actuaire au 31/12/2009.

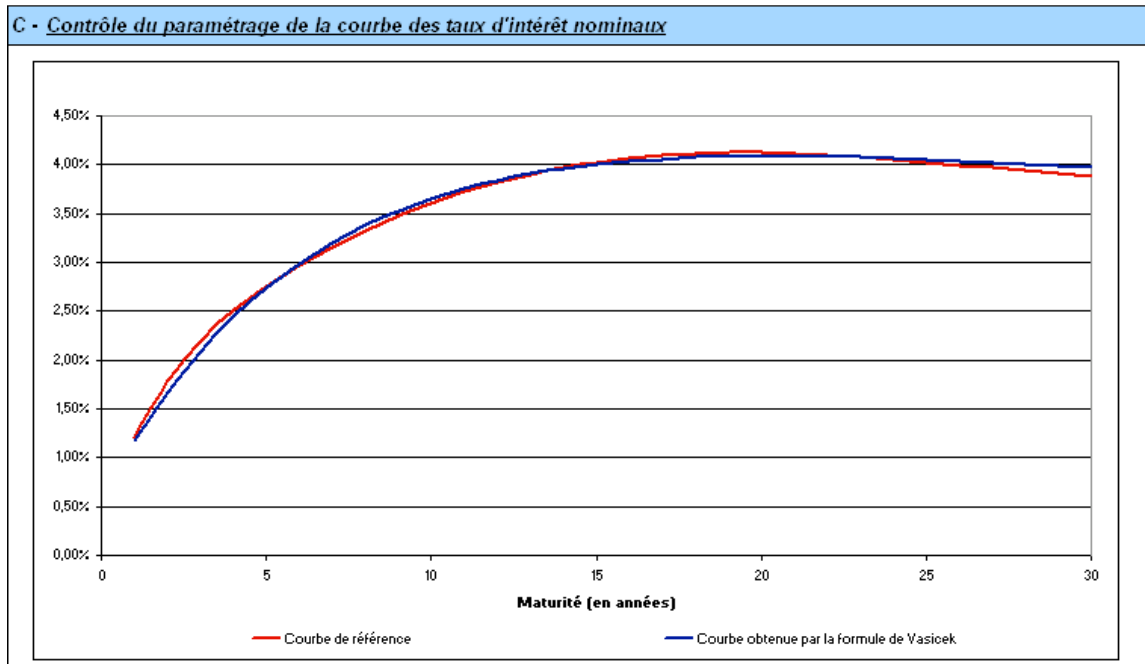


Figure 1 : Comparaison de la courbe de taux de référence avec la courbe de taux du modèle de Vasicek

3.3. ÉVALUATION DE LA PERFORMANCE DES OBLIGATIONS

Nous calculons à l'aide d'une méthode simplifiée les performances des obligations à taux fixes sur un horizon donné. Cette méthode requiert les courbes de taux nominaux que nous simulons à chaque pas de temps (ici chaque année). La performance des obligations à taux fixe de maturité 6 ans sur l'année t se calcule en fonction de la sensibilité des obligations à taux fixe de maturité 6 ans et du taux nominal 6 ans de la courbe des taux nominaux initiale du 31 décembre 2009 fournie par l'Institut des Actuaire.

La formule est la suivante :

$$perf(t, T) = \tau^{ref}(T) + Sensibilité \times (\tau^{proj}(t, T) - \tau^{ref}(T)) \quad (66)$$

Où :

- t est la date d'évaluation de la performance obligatoire
- T est la maturité de l'obligation considérée, dans notre étude $T=6$ ans
- $perf(t, T)$ est la performance à la date t de l'obligation à taux fixe de maturité T
- $\tau^{ref}(T)$ est le taux nominal 6 ans de la courbe des taux nominaux de l'institut des au 31/12/2009

- $\tau^{proj}(t, T)$ est le taux nominal 6 ans de la courbe des taux nominaux projeté à l'instant t .
- *Sensibilité* est la sensibilité de l'obligation à taux fixe de maturité 6 ans, dans notre étude la maturé est prise égale à 5.

3.4. LIEN ENTRE LES ACTIFS

Pour réaliser une projection plus réaliste de notre actif, il est nécessaire de prendre en compte le lien qu'il existe entre les différents actifs. Nous pouvons distinguer deux cas, celui où les conditions de marché sont dites « normales » et celui où des évènements extrêmes se produisent sur les marchés, comme une très forte hausse ou un crack boursier.

3.4.1 LIEN AU NIVEAU DU CŒUR DE LA DISTRIBUTION

Lorsqu'aucun phénomène extrême ne se produit, c'est-à-dire lorsque nos processus de diffusion ne subissent pas de sauts, le lien entre les différents actifs est modélisé par des coefficients de corrélation constants.

Pour modéliser la corrélation entre les actifs nous utilisons une décomposition de Cholesky. En effet, la matrice Ω , de variance covariance est une matrice symétrique, définie positive. D'après la décomposition de Cholesky, il existe alors une matrice triangulaire inférieure à diagonale positive, L , telle que : $\Omega = LL^T$.

La matrice $L = (l_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ se construit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } j = 1, & l_{i,1} = \rho_{i,1} \\ \text{pour } j > 1, & l_{i,j} = \frac{\rho_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} l_{j,k}}{\sqrt{\rho_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}} \end{cases}$$

où $\rho_{i,j}$ représente la corrélation entre l'actif i et l'actif j .

Une fois cette matrice construite, il suffit de créer un vecteur, B , de mouvements browniens indépendants. La dimension de ce vecteur doit être égale au nombre d'actifs corrélés entre eux. Nous obtenons finalement un vecteur W , de mouvements browniens corrélés, de la façon suivante :

$$W = LB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & & & \\ l_{1,2} & l_{2,2} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{1,n} & \dots & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

La valeur des coefficients de corrélation utilisée sera fixée comme la moyenne à long terme des corrélations historiques entre les actifs.

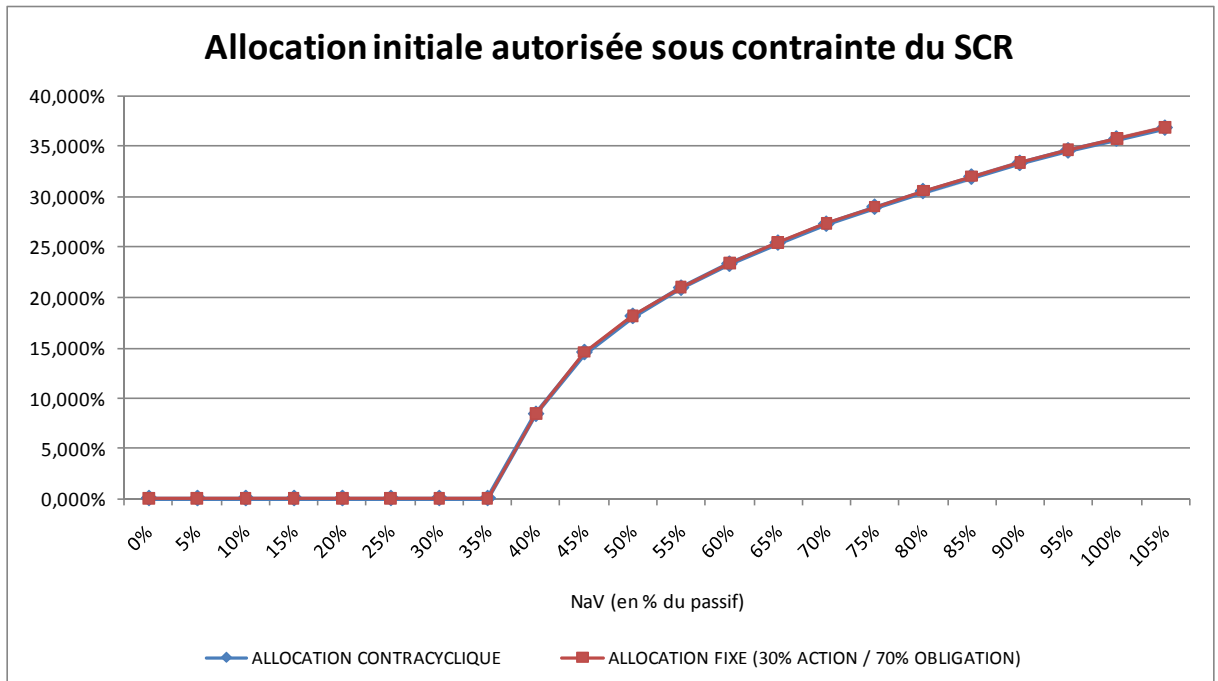
3.4.2 LIEN AU NIVEAU DES QUEUES DE DISTRIBUTION

En cas d'événement extrême sur le cours des actions ou le niveau des taux, la corrélation entre les actifs ne peut plus être considérée comme constante et égale à la corrélation historique. Ainsi, lorsqu'un des actifs subit un saut à la hausse ou à la baisse, nous changeons la probabilité de sauts des autres actifs pour tenir compte du phénomène défini précédemment.

4. RESULTATS EMPIRIQUES ET INTERPRETATION

Nous simulons 10 000 scénarios d'évolution d'actif sur un horizon de 10 ans avec un pas de temps annuel. Pour chaque scénario nous considérons les trois stratégies d'investissement décrites précédemment. Le but est donc de mesurer l'écart entre ces trois types de gestion, ce qui nous permettra de mettre en évidence le caractère procyclique du $SCR_{\text{marché}}$.

Afin de quantifier l'effet procyclique d'une gestion sous contrainte de $SCR_{\text{marché}}$, nous devons déterminer quel est le niveau de NaV initiale nécessaire qui réponde à la fois à notre contrainte de gestion (64) et qui soit proche de notre allocation cible (30% action et 70% obligation).

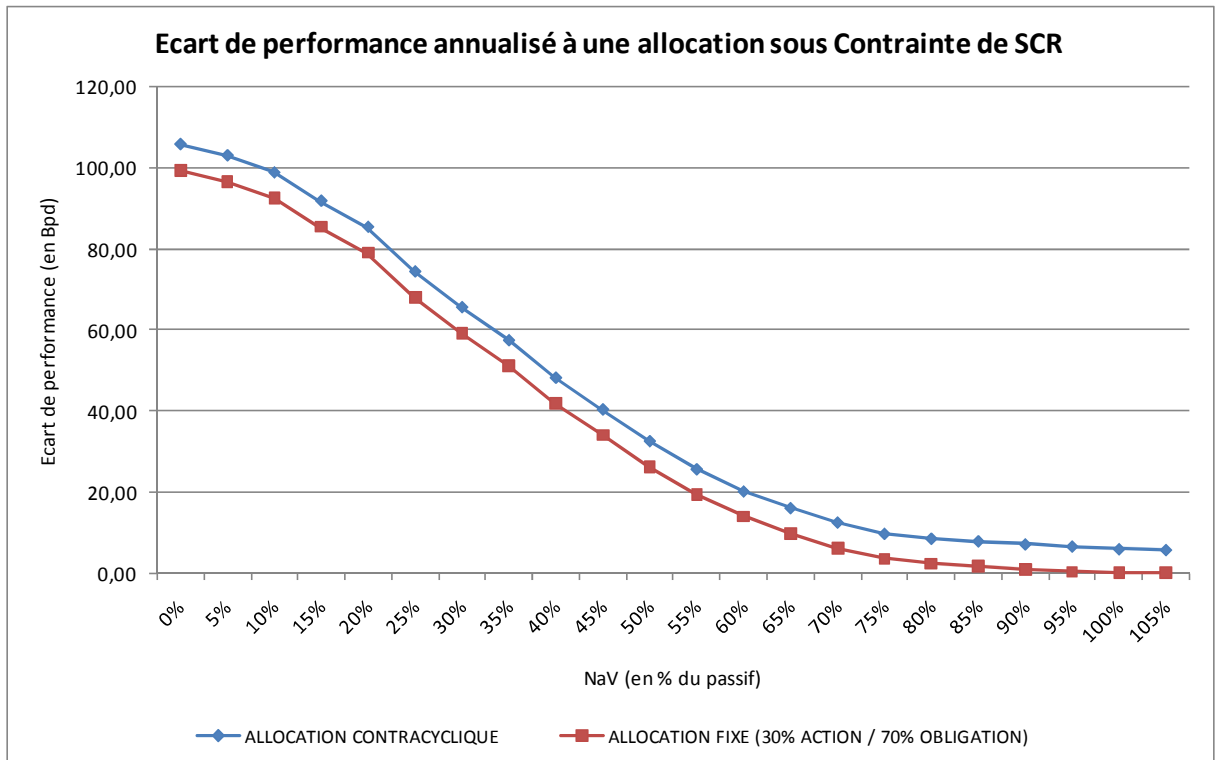


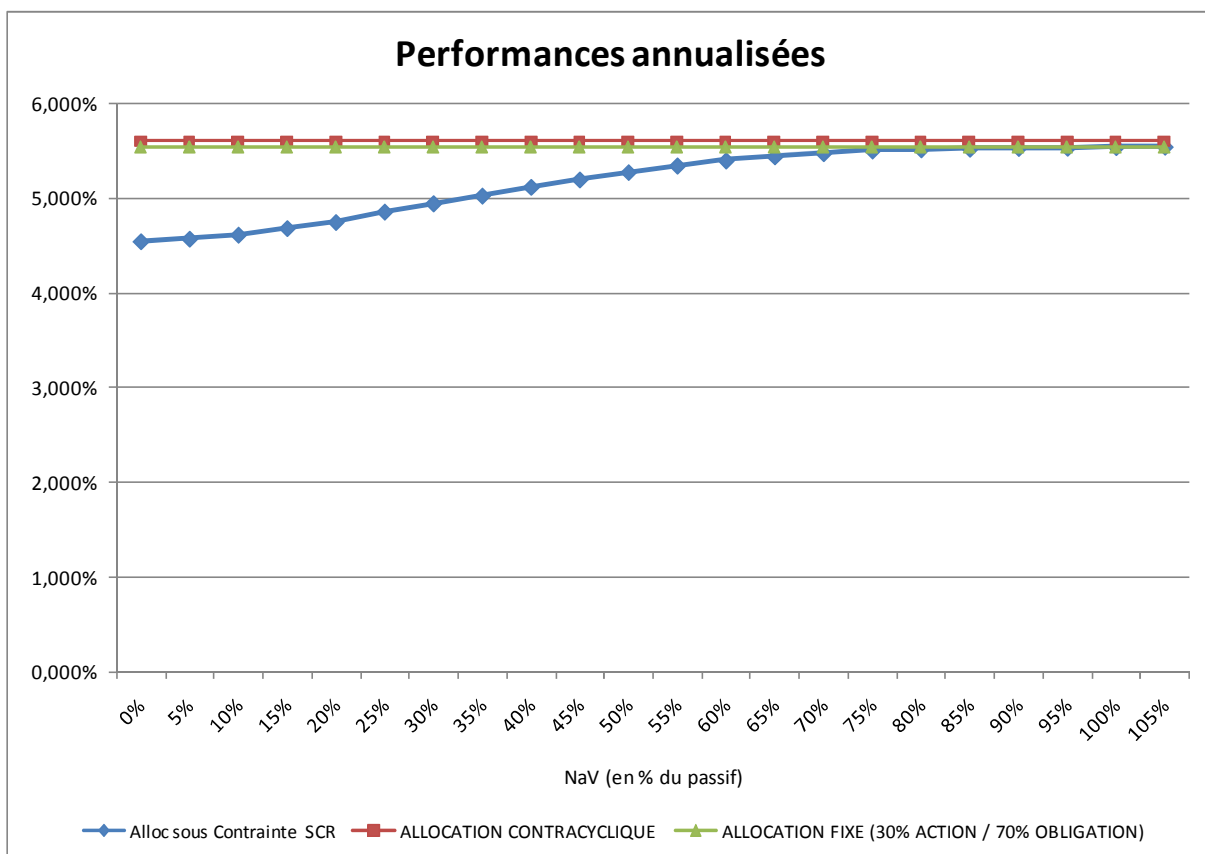
Le graphique ci-dessus présente l'allocation en action possible initialement pour un niveau de NaV donnée. Ces allocations fonction du niveau de NaV initiale répondent à la contrainte de $SCR_{\text{marché}}$ (64). Ainsi nous en déduisons le niveau de NaV nous permettant de détenir

initialement au moins 30% d'actions. Dans notre cas, cela correspond à une NaV d'au moins 80% du passif.

Nous quantifions l'effet procyclique du $SCR_{\text{marché}}$ en mesurant les écarts de performance annualisés entre une gestion saturant la contrainte (64), une allocation fixe (30% action et 70% obligation) et une gestion contracyclique.

Nous présentons donc l'écart annualisé entre l'allocation fixe et l'allocation sous contrainte de $SCR_{\text{marché}}$ en rouge et l'écart annualisé entre une allocation contracyclique et l'allocation sous contrainte en bleu.





Comme nous pouvons l’anticiper la gestion tenant compte des cycles économiques permet d’obtenir une performance annualisé plus grande que l’allocation fixe et encore plus importante que l’allocation sous contrainte de $SCR_{\text{marché}}$. Celle-ci, dégrade la performance car le gérant va chaque année vendre lorsque les actions auront perdu de la valeur et en acheter lorsqu’elles auront subi une hausse. L’écart de performance annualisé entre une gestion sous la contrainte (64) et une gestion statique avec 30% action et 70% obligation est de 2,39 Bps. L’écart de performance est plus marqué entre la gestion sous contrainte et la gestion « contracyclique », cette écart est de 8,82 Bps.

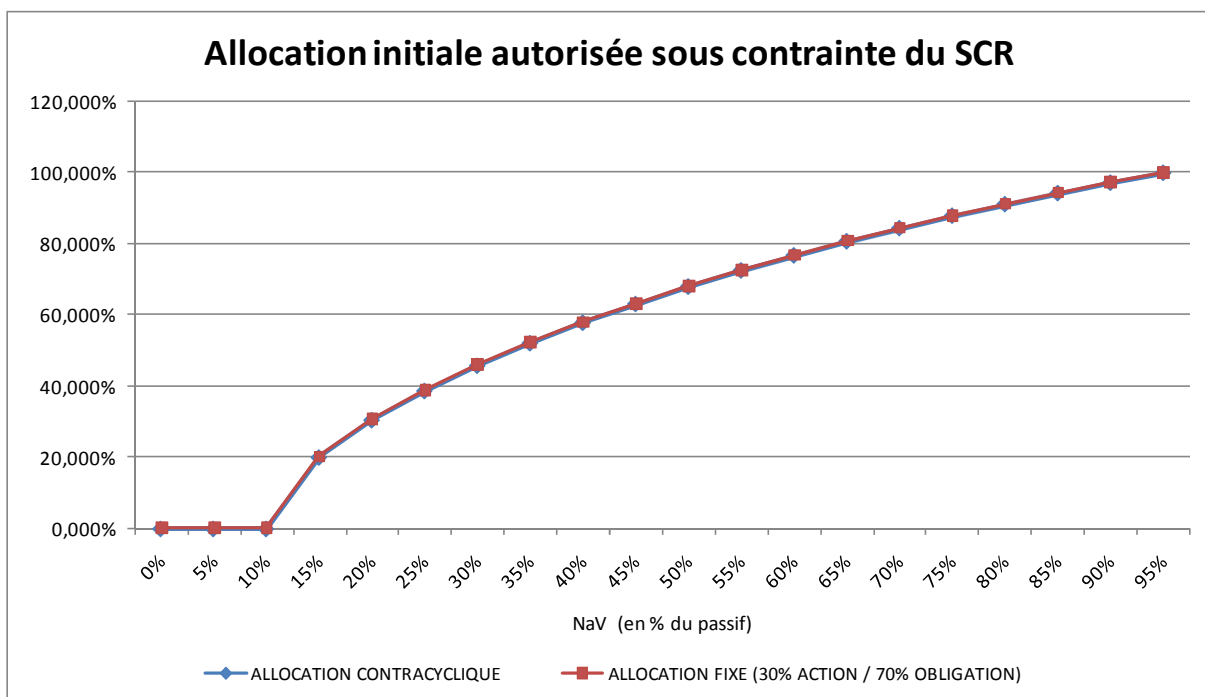
Le risque de marché apparaît comme l’un des modules les plus importants de la formule standard. Le QIS 4 (et auparavant le QIS 2 et le QIS 3) a montré que le besoin de capital lié à ce risque représentait environ :

- **44% du besoin global en assurance non-vie** (49% dans le QIS 3 et 40% dans le QIS 2)
- **82% du besoin global en assurance vie** (75% dans le QIS 3 et 77% dans le QIS 2).

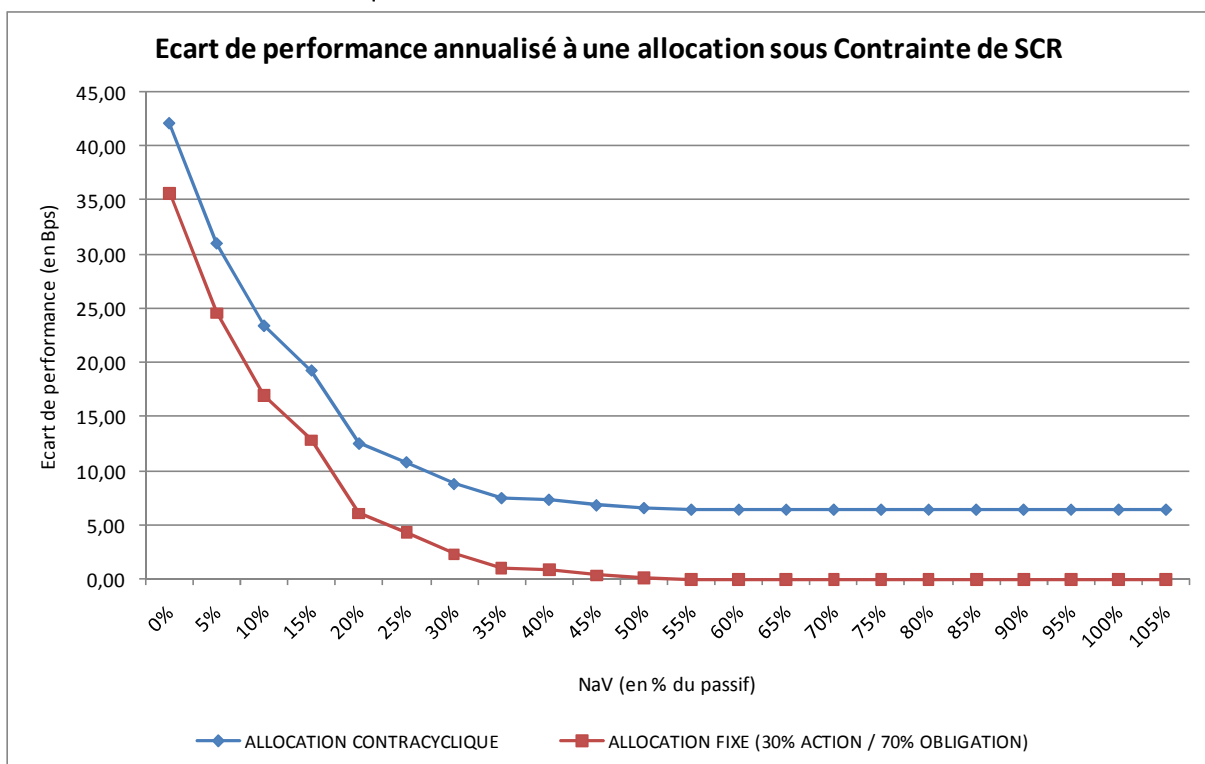
Nous pouvons considérer le cas où le $SCR_{\text{marché}}$ est couvert par 80% du besoin globale. La contrainte devient donc :

$$SCR_{\text{marché}}(t) \leq 80\% \cdot NaV(t) \quad (67)$$

Dans ce cas, la NaV initiale permettant de saturé la contrainte (67) avec une allocation de 30% action et 70% obligation diminue :



En augmentant le besoin en capital couvrant le $SCR_{\text{marché}}$, le gérant peut – en comparaison avec la contrainte (64) – détenir plus d’actions dans son portefeuille. C’est pour cela que plus le $SCR_{\text{marché}}$ sera « gourmand » en besoin en capital plus la courbe se translatera vers la gauche. Dans le cas, où le $SCR_{\text{marché}}$ correspond à 80% de la NaV , une NaV initiale représentant 20% du passif permet de détenir 30% d’action en saturant la contrainte (67). Nous présentons, le graphique des écarts de performance annualisé pour un $SCR_{\text{marché}}$ couvrant 80% de la NaV à chaque instant.



L'écart de performance est encore plus marqué que dans le cas où le $SCR_{\text{marché}}$ couvrirait 30% de la NaV . Cela est dû au fait que les actions sont encore plus pénalisées par le critère de $SCR_{\text{marché}}$ entraînant un effet procyclique plus prononcé. L'écart de performance annualisé entre une gestion sous la contrainte (64) et une gestion statique avec 30% action et 70% obligation est de 6,11 Bps. L'écart de performance est plus marqué entre la gestion sous contrainte et la gestion « contracyclique », cette écart est de 12,54 Bps.

Afin de mettre en évidence, le rôle particulier du SCR_{action} nous considérons le cas où la performance obligataire est constante et où la courbe des taux est figée. Ainsi pour un SCR_{taux} constant, nous nous intéressons à la procyclicité liée au SCR_{action} . Nous présentons dans un tableau récapitulatif les écarts de rentabilités pour différents cas.

Ecart de rentabilité annualisé (SCR_{taux} variable)		
	Allocation sous contrainte $SCR_{\text{marché}}(t) \leq 30\% \cdot NaV(t)$	Allocation sous contrainte $SCR_{\text{marché}}(t) \leq 80\% \cdot NaV(t)$
Allocation fixe	2,39 Bps	6,11 Bps
Allocation Contracyclique	8,82 Bps	12,54 Bps
Ecart de rentabilité annualisé (SCR_{taux} constant)		
	Allocation sous contrainte $SCR_{\text{marché}}(t) \leq 30\% \cdot NaV(t)$	Allocation sous contrainte $SCR_{\text{marché}}(t) \leq 80\% \cdot NaV(t)$
Allocation fixe	2,8 Bps	13,23 Bps
Allocation Contracyclique	10,36 Bps	20,79 Bps

Comme nous l'observons la composante procyclique de notre $SCR_{\text{marché}}$ réside en grande partie dans le SCR_{action} .

V. CONCLUSION

Au-delà des ajustements visant à tenir qualitativement compte du coût en fonds propres, les processus de gestion pour les organismes assureurs vont être profondément modifiés par la directive Solvabilité II.

Le but de ce chapitre était d'introduire la directive Solvabilité II, son cadre conceptuel et sa mise en application. Nous avons une approche pragmatique de la question, au sens où nous nous intéressons à la mise en œuvre pratique de cette directive.

La vision du risque représentée dans Solvabilité II (formule standard dans le modèle interne avec une VaR à 99,5% à horizon 1 an) n'est pas nécessairement la vision du risque correspondant aux préoccupations de l'organisme assureur qui peut éventuellement avoir un horizon plus long. C'est pour cela que nous nous focalisons sur la gestion à long terme que pourrait avoir un assureur. Dans ce cadre, l'outil de contrôle des risques engendre un phénomène de procyclicité. Après avoir eu une approche qualitative, nous proposons une quantification de la procyclicité liée à une gestion sous contrainte du $SCR_{\text{marché}}$.

Comme nous l'avons montré dans notre approche simplifiée, le caractère procyclique du SCR_{action} engendre un écart de performance en une gestion sous contrainte de SCR et une gestion avec une allocation fixe (30% action et 70% obligation) ou une gestion contracyclique.

Nous tenons à nuancer notre conclusion. La procyclicité reste significativement difficile à exploiter, compte tenu des faibles écarts observables. Cependant, comme nous pouvons l'observer pour un grand nombre d'assureurs, la gestion financière est souvent déléguée aux sociétés de gestion. Il est intéressant de voir que le niveau de frais de gestion financière est de l'ordre de 10 à 30 points de base. Une performance diminuée de quelques points de base (comme nous l'avons montré) peut entraîner un préjudice non négligeable sur un encours important.

Conclusion Générale

Une crise financière est un phénomène qui peut être observé à plusieurs échelles. Nous avons proposé une mesure quantitative des crises financières – le *WhIMS*, basée sur une analyse multi-résolutions de la volatilité du marché. Cet indicateur consiste en la caractérisation de la volatilité des rendements, vue par différents types d'investisseurs opérant sur un large panel d'horizons d'investissement. Il peut être calculé sur un échantillon de données de basses ou de hautes fréquences.

L'algorithme de calcul du *WhIMS* repose sur une analyse par ondelettes nous permettant d'obtenir une décomposition de la volatilité sur différentes échelles temporelles. Les composantes de cette décomposition présentant une faible corrélation entre elles, sont utilisées afin de déterminer des facteurs de rentabilités pour un horizon s'étalant de la semaine au trimestre. L'amélioration apportée à l'IMS de Maillet et Michel se retrouve au niveau de l'analyse factorielle. En effet, afin de tenir compte des propriétés des séries financières, nous utilisons une ACI (au lieu d'une ACP) ne présupposant pas ainsi du caractère gaussien ou linéaire des données financières. Le *WhIMS* ne s'appuie pas sur la log-normalité des facteurs issus de l'ACI, et donc le rend plus robuste d'un point de vue de la distribution des données.

Nous avons dégagé une définition des crises basée sur la distribution du *WhIMS* afin de dater les crises sur les marchés financiers, mais aussi afin de mesurer leur gravité et les comparer entre elles. Finalement, nous avons intégré la modélisation du *WhIMS* au sein du framework HMC-MLP, pour tenir compte des éventuels changements de régime dans les turbulences financières. Une classification non-linéaire, comme par exemple une carte de Kohonen, basée sur le *WhIMS* et les probabilités conditionnelles de la modélisation HMC-MLP, permet d'identifier et de caractériser les conditions du marché. Reste alors à déterminer statistiquement, et non plus économiquement, le nombre de régimes dans le HMM (Gassiat, 2002 ; Olteanu, 2006).

Dans le cadre de l'allocation d'actifs et de la gestion des risques, une orientation de recherche judicieuse serait de cerner comment l'identification des régimes de condition du marché, basée sur des experts - entraînés sur les probabilités conditionnelles combinées aux valeurs du *WhIMS* - permettrait de définir une nouvelle technique d'optimisation de portefeuille.

La deuxième partie de notre étude éclaircit la relation entre performance et risque. Nous avons pour but la mesure de l'effet du contrôle des risques sur la distribution des performances d'un gérant. Nous avons donc considéré différentes mesures de performance et modèles de diffusion du *benchmark*. Cela nous a permis de voir dans quelle mesure l'hypothèse sur la distribution des performances impacte la gestion des risques. De plus, les différentes mesures de performance nous ont permis d'avoir une vision plus large du couple rendement/risque (traditionnellement représenté par la volatilité).

La gestion des risques peut nuire à l'efficacité de gestion financière. La performance est directement affectée par le réglage de son contrôle de risque. Un contrôle de risque mal coordonné avec la gestion ou mal étalonné est une cause fréquente de sous-performance.

Concernant le contrôle des risques associé aux compagnies d'assurance, la procyclicité des règles et des méthodes de contrôle de risques nuit à la performance à long terme. Comme nous l'avons montré l'utilisation du $SCR_{\text{marché}}$ pour la gestion financière entraîne un comportement procyclique et donc dégrade la performance à long terme. Le $SCR_{\text{marché}}$ correspond à une *VaR*. Une gestion sous contrainte de $SCR_{\text{marché}}$ va conduire à sous-estimer le risque de perte en haut de cycle, et à le surestimer après un krach. Elle est naturellement procyclique. Les écarts de performances annualisés observés dans notre étude restent faibles. Cependant, comme nous l'avons mentionné une différence de quelques points de bases constitue une rémunération non négligeable sur un encours important.

Un investisseur institutionnel gérait traditionnellement à long terme, ce qui lui permettait d'être contracyclique avec une certaine efficacité. En lui imposant des contraintes de risque procycliques à horizon court, on le condamne à moins performer à long terme et on accroît la volatilité des marchés ainsi que le risque systémique.

Références Bibliographiques

Aftalion F., P. Poncet, (juin 1991), "les mesures de performance des OPCVM : problèmes et solutions", *Revue Banque* 517, 582-588

Andersen T., T. Bollerslev, F. Diebold et P. Labys, (2001a), "The Distribution of Exchange Rate Volatility", *Journal of the American Statistical Association* 96(453), 42-55.

Arneodo A., J. Muzy and D. Sornette, (1998), "Casual Cascade in Stock Market from the 'Infrared' to the 'Ultraviolet'", *European Physical Journal B* 2, 277-282.

Artzner P., F. Delbaen, J. Eber and D. Heath, (1999), "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance* 9(3), 203-228.

Avouyi-Dovi S. et R. Caulet, (1995), "Les réseaux de neurones artificiels : une application à la prévision des prix des actifs financiers", Caisse des Dépôts et Consignations, *Cahiers de Recherche 1995-19/T*, 23 pages.

Back A. et A. Weigend, (1997), "A First Application of Independent Components Analysis to Extracting Structures from Stock Returns", *International Journal of Neural Systems* 8(4), 473-484.

Baker R., (2008), "An Order-statistics based Method for Constructing Multivariate Distributions with Fixed Marginals", *Journal of Multivariate Analysis* 99(10), 2312-2327.

Bali T., (2003-a), "An Extreme Value Approach to Estimating Volatility and Value-at-Risk", *Journal of Business* 76(1), 83-108.

Bali T., (2003-b), "The Generalized Extreme Value Distribution", *Economics Letters* 79(3), 423-427.

Barndorff-Nielsen O. et N. Shephard, (2002a), "Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Covariance, Regression and Correlation in Financial Economics", *Econometrica* 72(3), 885-925.

Barndorff-Nielsen O. et N. Shephard, (2002b), "Estimating Quadratic Variation using Realized Variance", *Journal of Applied Econometrics* 17, 457- 477.

Baum L., T. Petrie, G. Soules et N. Weiss, (1970), "A Maximization Technique Occurring in the Statistical Analysis of Probabilistic Functions of Markov Chains » , *The Annals of Mathematical Statistics* 1, 164-171.

- Ben Omrane W. et E. de Bodt, (2007), "Using Self-Organizing Maps to adjust for Intra-day Seasonality", *Journal of Banking and Finance* 31, 1817-1838.
- Black F., M. Scholes, (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* 81(3), 637-659
- Bollerslev T., (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- Brown R., Tolikas K., 2006, "The Distribution of the Extreme Daily Share Returns in the Athens Stock Exchange", working paper.
- Cardoso J., (1989), "Source Separation using Higher Order Moments", International Conference on Acoustics, *Speech and Signal Processing (ICASSP'89)*, 2109-2112.
- Cardoso J., (1999), "High-order Contrasts for Independent Component Analysis", *Neural Computation* 11(1), 157-192.
- Cheridito P. and M. Stajje, (2009), "Time-inconsistency of VaR and Time-consistent Alternatives", *Finance Research Letters* 6(1), 40-46.
- Comon P., (1994), "Independent Component Analysis - A New Concept?", *Signal Processing* 36(3), 287-314.
- Dowd K., (1999), "A Value at Risk Approach to Risk-return Analysis", *Journal of Portfolio Management* 25(4), 60-67.
- Dowd K., (2000), "Adjusting for Risk: An Improved Sharpe Ratio", *International Review of Economics and Finance* 9(3), 209-222.
- Engle R., (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica* 50, 987-1007
- Engle R. and S. Manganelli, (2004), "CAViaR: Conditional AutoRegressive Value-at-Risk by Regression Quantiles", *Journal of Business and Economic Statistics* 22(4), 367-381.
- Fernandez V., (2004), "Time-scale Decomposition of Price Transmission in International Markets", *Center for Applied Economics, University of Chile, Working paper* 189, 33 pages.
- Franses P. et D. van Dijk, (1999), "Outlier Detection in the GARCH(1,1) Model", *Econometric Institute Research, Working Paper* EI-9926/RV, 18 pages.
- Gabor D., (1946), "Theory of Communication", *Journal of the Institut of Electrical Engineers* 93, 429-457.

- Galagedera U. et E. Maharaj, (2008), "Wavelet Timescales and Conditional Relationship between Higher-order Systematic Co-moments and Portfolio Returns", *Quantitative Finance* 8(2), 201-215.
- Gallais-Hamonno G., P. Grandin, (1999), "Les mesures de performance", *Banque & Marchés* 42, 56-61
- Gassiat E., (2002), "Likelihood Ratio Inequalities with Applications to Various Mixtures", *Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques* 38(6), 897-906.
- Gençay R., F. Selçuk and B. Whitcher, (2001), "An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics", *Academic Press*, San Diego, 359 pages.
- Glosten L., R. Jagannathan et D. Runkle, (1993), "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", *Journal of Finance* 48, 1779-1801.
- Hardy M.R., (2001), "A Regime /Switching Model of Long-Term Stock Returns", *North American Actuarial Journal* 5(2), 41-53.
- Hawley D., J. Johnson et D. Raina (1990), "Artificial Neural Systems: a new Tool for Financial Decision-making", *Financial Analysts Journal* 46, 63-72.
- Hosking J., (1989), "Some Theoretical Results Concerning L-Moments", *Research Report RC14492*, IBM Research Division, 13 pages.
- Hosking J., (1990), "L-moments: Analysis and Estimation of Distributions using Linear Combinations of Order Statistics", *Journal of the Royal Statistical Society* 52, 105-124.
- Hosking J., (2007), "Some Theory and Practical Uses of Trimmed L-moments", *Journal of Statistical Planning and Inference* 137(9), 3024-3039.
- Hull J., (2004), "Options, futures et autres actifs dérivés", *Pearson Education*.
- Hyvärinen A., (1999), "Fast and Robust Fixed-Point Algorithms for Independent Component Analysis", *IEEE Transactions on Neural Networks* 10(3), 626-634.
- Hyvärinen A. et E. Oja, (1997), "A Fast Fixed-point Algorithm for Independent Component Analysis", *Neural Computation* 9(7), 1483-1492.
- Hyvärinen A., (1999), "Survey on Independent Component Analysis", *Neural Computing Surveys* 2, 94-128.
- Hyvärinen A., J. Karhunen et E. Oja, (2001), "Independent Component Analysis, John Wiley & Sons, 482 pages.

K. Hornik, M. Stinchcombe et H. White, (1989), "Multilayer Feedforward Networks are Universal Approximators", *Neural Networks Vol. 2*, p 359

Karvanen J., (2006), "Estimation of Quantile Mixtures via L-moments and Trimmed L-moments », working paper.

Lee H., (2004), "International Transmission of Stock Market Movements: A Wavelet Analysis", *Applied Economics Letters 11*, 197-201.

Maillet B., P. Merlin and P. Rousset, (2005), "Robust SOM for Realistic Data Completion", *Proceedings of the 5th Workshop On Self-organizing Maps*, 371-378.

Maillet B. and T. Michel, (2003), "An Index of Market Shocks based on Multiscale Analysis", *Quantitative Finance 3(2)*, 88-97.

Maillet B. and T. Michel, (2005), "The Impact of the 9/11 Events on the American and French Stock Markets", *Review of International Economics 13(3)*, 597-611.

Maillet B., M. Olteanu and J. Rynkiewicz, (2004), "Non-linear Analysis of Shocks when Financial Markets are Subject to Changes in Regime", *Proceedings of ESANN 2004- European Symposium on Artificial Neural Networks*, Bruges, Belgium.

Merton R., (1980), "On Estimating the expected return on the market", *Journal of Financial Economics*, 323-361

Müller U., M. Dacorogna, R. Dave, O. Pictet, R. Olsen and J. von Weizsäcker, (1997), "Volatilities of Different Time Resolutions - Analysing the Dynamics of Market Components", *Journal of Empirical Finance 4(2-3)*, 213-239.

Nelson D., (1991), "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica 59*, 347-370.

PLANCHET F., P. THEROND, J. JACQUEMIN, (2005), "Modèles financiers en assurance analyse de risque dynamique", *Economica*.

Ramsey J. and Z. Zhang, (1997), "The Analysis of Foreign Exchange Rate Data using Waveform Dictionaries", *Journal of Empirical Finance 4(4)*, 341-372.

Richter C., (1958), "Elementary Seismology, *W. Freeman and Company*, 768 pages.

Rosenblatt F., (1958), "The Perceptron: Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain », *Psychological Review 65*, 386-408.

Serfling R. and P. Xiao, (2007), "A Contribution to Multivariate L-moments: L-comoment Matrices", *Journal of Multivariate Analysis 98(9)*, 1765-1781.

Sharpe W., (1992), "Asset allocation : Management style and performance Measurement", *The Journal of Portfolio Management*, 1-19

Sharpe W., (1994), "The Sharpe Ratio", *Journal of Portfolio Management* repris sur le site de wsharpe.stanford.edu.com

Sharpe W., (1998), "Morningstar's Risk-Adjusted Ratings", *Financial Analysts Journal*, 21-33

Sillitto G., (1951), "Interrelations between certain Linear Systematic Statistics of Sample from any Continuous Population", *Biometrika* 38, 377-382.

Sortino F. and R. van der Meer, (1991), "Downside Risk", *Journal of Portfolio Management* 17(4), 27-31.

Tazé-Bernard E., S. Laguiche, (1996), "Benchmark d'un portefeuille : mode d'emploi Banque" n°570

Thompson E., L. Baise and R. Vogel, (2007), "A Global Index Earthquake Approach to Probabilistic Assessment of Extremes", *Journal of Geophysical Research* 112(B6), 1-12.

Viterbi A., (1967), "Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm », *IEEE Transactions on Information Theory* 13, 260-269.

Zumbach G., M. Dacorogna, J. Olsen and R. Olsen, (2000), "Measuring Shocks in Financial Markets", *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 3(3), 347-355.

ANNEXE 1 : L'ALGORITHME DE RETRO-PROPAGATION

L'algorithme de rétro-propagation est ici détaillé pour un perceptron à trois couches composé de d neurones en entrée, $\{(x_i), i \in \{1, 2, \dots, d\}\}$, h neurones sur la couche cachée $\{(z_j), j \in \{1, 2, \dots, h\}\}$ et c neurones en sortie $\{(y_k), k \in \{1, 2, \dots, c\}\}$.

Cette démonstration peut s'étendre à des perceptrons possédant plus de trois couches. Le réseau $p = (d + c) \times h$ poids, $w = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$. Ces poids peuvent être renommés de manière explicite de la façon suivante : w_{ab} est le poids de la connexion entre le neurone b et le neurone a de la couche suivante. On note ε la fonction d'erreur et δ_a correspond à la dérivée partielle de ε par rapport à l'entrée du neurone a . Avec ces notations, l'algorithme s'écrit de la manière suivante :

- Initialisation des poids du réseau
- Répéter pour chaque exemple d'apprentissage :
 - ❶ Appliquer le réseau et calculer les sorties
 - ❷ Calculer les deltas
 - Pour chaque unité de sortie k , calculer δ_k puis $\Delta w_{kj} \leftarrow -\eta \delta_k x_j$
 - Pour chaque unité cachée j , calculer δ_j puis $\Delta w_{ji} \leftarrow -\eta \delta_j x_i$
 - ❸ Ajuster les poids
 - $w_{ji} \leftarrow w_{ji} + \Delta w_{ji}$
 - $w_{kj} \leftarrow w_{kj} + \Delta w_{kj}$

ANNEXE 2 : LES ALGORITHMES D'APPRENTISSAGE D'UNE CHAÎNE DE MARKOV CACHÉE (OU HMM POUR HIDDEN MARKOV MODEL)

Nous explicitons ici les deux algorithmes d'apprentissage des chaînes de Markov cachées, l'algorithme de Baum-Welch et l'algorithme de Viterbi. Nous reprenons pour cela les notations introduites dans la partie consacrée aux HMM. Soit $\lambda = (A, B, \pi)$ le modèle HMM, et $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ l'ensemble des N états possibles de la chaîne, on a :

- $A = \{a_{ij}\}$ la matrice des probabilités de transition entre les états S_i à l'état S_j , c'est-à-dire $a_{ij} = P(q_t = S_j | q_{t-1} = S_i)$, où $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$,
- $\pi = \{\pi_i\}$ le vecteur des probabilités initiales, soit $\pi_i = P(q_1 = S_i)$ où $i \in \{1, \dots, N\}$ et $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$,
- $O = \{O_1, \dots, O_T\}$ le vecteur de T observations émises,
- $V = \{v_k\}$ où $k \in [1, \dots, n_v]$ l'ensemble des valeurs discrètes observables,
- $B = \{b_j(k)\}$ l'ensemble des probabilités d'émissions des valeurs discrètes v_k dans l'état S_j , soit $b_j(k) = P(O_t = v_k | q_t = S_j)$.

L'algorithme de Baum-Welch nécessite l'utilisation de deux algorithmes, dits Forward et Backward, que nous introduisons des maintenant.

L'algorithme Forward : nous définissons la variable avant (*forward* en anglais) qui représente la probabilité d'observer les t premières observations et d'aboutir dans l'état i à l'instant t .

$$\alpha_t(i) = P(o_1, \dots, o_t | q_t = S_i, \lambda)$$

Pour tous les états $1 \leq i \leq N$, la variable *forward* est initialisée.

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(o_1)$$

La règle de Bayes permet un calcul récursif de cette variable, pour $t = 2, \dots, T$ et $1 \leq i \leq N$,

$$\alpha_t(i) = \sum_{j=1}^N \alpha_{t-1}(j) a_{j,i} b_i(o_t)$$

La vraisemblance de la suite d'observations O par rapport au modèle λ s'écrit

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i)$$

L'algorithme Backward : nous définissons la variable arrière (*backward* en anglais) qui représente la probabilité d'observer les $t + 1$ dernières observations sachant que l'on part de l'état i à l'instant t .

$$\beta_t(i) = P(o_{t+1}, \dots, o_T | q_t = S_i, \lambda)$$

Pour tous les états $1 \leq i \leq N$, la variable *backward* est initialisée.

$$\beta_T(i) = 1$$

La règle de Bayes permet un calcul récursif de cette variable, pour $t = 2, \dots, T$ et $1 \leq i \leq N$,

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N \beta_{t+1}(j) a_{j,i} b_i(o_{t+1})$$

La vraisemblance de la suite d'observations O par rapport au modèle λ s'écrit

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^N \pi_i b_i(o_1) \beta_1(i)$$

L'algorithme de Baum-Welch : il permet d'estimer les paramètres d'un modèle *HMM*. Soit $\xi_t(i, j)$ la probabilité d'être dans l'état i en t et dans l'état j en $t + 1$, sachant le modèle et la séquence d'observation, on a :

$$\begin{aligned} \xi_t(i, j) &= P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j | O, \lambda) \\ \xi_t(i, j) &= P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j, O | \lambda) \times [P(O | \lambda)]^{-1} \\ \xi_t(i, j) &= \alpha_t(i) a_{j,i} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j) \times [P(O | \lambda)]^{-1} \end{aligned}$$

Soit $\gamma_t(i)$ la probabilité d'être dans l'état i à l'instant t , sachant le modèle et la séquence d'observation :

$$\gamma_t(i) = P(q_t = S_i | O, \lambda) = [\alpha_t(i) \beta_t(i)] \times \left(\sum_{j=1}^N \alpha_t(j) \beta_t(j) \right)^{-1} = \sum_{j=1}^N \xi_t(i, j)$$

On calcule alors des estimateurs de a_{ij} et de $b_j(o)$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ij} &= \left(\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i, j) \right) \left(\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i) \right)^{-1} \\ \hat{b}_j(o) &= \left(\sum_{t=1}^T \mathbb{1}_{(o_t=o)} \gamma_t(j) \right) \left(\sum_{t=1}^T \gamma_t(j) \right)^{-1} \end{aligned}$$

- Initialisation aléatoire de A et B
- Répéter jusqu'à stabilisation de A et B :
 - ① Phase *Expectation* : pour toute séquence O^k ,
 - Calculer $\alpha_t^k(i)$ et $\beta_t^k(i)$ avec les algorithmes *forward* et *backward*
 - Calculer $\xi_t^k(i, j)$ et $\gamma_t^k(i)$
 - ② Phase *Maximisation* :
 - Calculer A et B avec les estimations \hat{a}_{ij} et $\hat{b}_j(o)$

L'algorithme de Viterbi : il est utilisé pour la recherche de la meilleure séquence d'états cachés, ou chemin, ayant générée une suite d'observation $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ selon un modèle λ . Le chemin optimal est défini par :

$$P(o_1, \dots, o_T, \rho^* | \lambda) = \max_{\rho} P(o_1, \dots, o_T, \rho | \lambda)$$

Soit la variable $\phi_t(i) = \max_{i_1, \dots, i_{t-1}} P(o_1, \dots, o_T, q_{i_1}, \dots, q_{i_{t-1}}, q_i | \lambda)$ représentant le maximum, sur tous les chemins partiels possibles de longueur t aboutissant à l'état i , des probabilités

d'émission des t premières observations $\{o_1, \dots, o_t\}$. La probabilité d'émission le long du chemin optimal recherché est :

$$P(o_1, \dots, o_T, \rho^* | \lambda) = \max_{0 \leq i \leq N} \phi_t(i)$$

La règle de Bayes nous donne la formule récurrente suivante, pour $1 \leq t \leq T$ et $1 \leq j \leq N$:

$$\phi_t(j) = \max_{0 \leq i \leq N} (a_{j,i} \phi_{t-1}(i)) b_j(o_t)$$

On introduit la variable $\psi_t(j) = \operatorname{argmax}_{1 \leq i \leq N} (a_{j,i} \phi_{t-1}(i))$ permettant de mémoriser, à chaque itération, l'état correspondant au maximum. L'état final du chemin optimal s'écrit :

$$q^T = \operatorname{argmax}_{0 \leq i \leq N} \phi_T(i)$$

$\psi_t(\cdot)$ permet de retrouver les états précédents par une récurrence arrière :

$$\begin{cases} q^{T-1} = \psi_T(q^T) \\ \vdots \\ q^t = \psi_{t+1}(q^{t+1}) \\ \vdots \\ q^0 = \psi_1(q^1) \end{cases}$$

ANNEXE 3 : TABLEAUX RECAPITULATIFS DES STATISTIQUES DESCRIPTIVES DE LA DISTRIBUTION DES PERFORMANCES A HORIZON UN AN

Tableau récapitulatif des statistiques descriptives de la distribution des performances à horizon 1 an du portefeuille, en fonction du plafond de tracking error (TE), du modèle de diffusion du benchmark quand le gérant prévoit parfaitement à 3 ans

	Modèle de diffusion de l'indice de référence	Black-Scholes	C.E.V	Régime Switching	Régime Switching avec sauts
Plafonds de TE à 10%	Moyenne	14,58%	14,92%	16,35%	15,48%
	Ecart type	28,80%	29,08%	30,55%	31,59%
	VaR à 99,5%	-37,66%	-43,14%	-42,32%	-44,34%
	Ratio d'information	63,15%	68,03%	-77,72%	69,92%
	Ratio de Sharpe	43,67%	44,43%	46,95%	42,67%
	Ratio de Dowd (VaR à 99,5%)	-33,40%	-29,96%	-33,90%	-30,41%
	Indice AP	3,91%	4,24%	5,37%	4,65%
Plafonds de TE à 5%	Moyenne	11,34%	11,50%	12,16%	11,75%
	Ecart type	24,05%	24,35%	25,12%	26,43%
	VaR à 99,5%	-33,70%	-39,79%	43,22%	-45,92%
	Ratio d'information	60,08%	64,80%	73,65%	66,30%
	Ratio de Sharpe	38,81%	39,03%	40,46%	36,90%
	Ratio de Dowd (VaR à 99,5%)	-27,70%	-23,88%	-23,52%	-36,71%
	Indice AP	2,09%	2,24%	2,82%	2,47%
Plafonds de TE à 2%	Moyenne	9,41%	9,48%	9,73%	9,56%
	Ecart type	21,69%	21,97%	22,52%	23,94%
	VaR à 99,5%	-33,44%	-40,45%	-46,05%	-47,28%
	Ratio d'information	58,30%	62,94%	71,31%	64,22%
	Ratio de Sharpe	34,16%	34,04%	34,33%	31,59%
	Ratio de Dowd (VaR à 99,5%)	-22,16%	-18,49%	-28,54%	-16,00%
	Indice AP	0,87%	1,38%	1,17%	1,03%
Benchmark	Moyenne	8,13%	8,13%	8,13%	8,13%
	Ecart type	20,35%	20,60%	21,10%	22,58%
	VaR à 99,5%	-33,61%	-41,41%	-48,47%	-49,03%
	Ratio de Sharpe	30,15%	29,80%	29,09%	27,13%
	Ratio de Dowd (VaR à 99,5%)	-18,25%	-14,83%	-12,66%	-12,50%
Indice AP	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	

Tableau récapitulatif des statistiques descriptives de la distribution des performances à horizon 1 an du portefeuille, en fonction du plafond de tracking error (TE), du modèle de diffusion du benchmark quand le gérant se trompe une fois sur deux

	Modèle de diffusion de l'indice de référence	Black-Scholes	C.E.V	Régime Switching	Régime Switching avec sauts
Plafonds de TE à 10%	Moyenne	8,10%	8,08%	8,03%	8,04%
	Ecart type	23,38%	23,50%	24,07%	25,42%
	VaR à 99,5%	-39,27%	-45,75%	-49,67%	-51,03%
	Ratio d'information	4,65%	4,57%	4,23%	4,61%
	Ratio de Sharpe	26,07%	25,89%	25,05%	23,74%
	Ratio de Dowd (VaR à 99,5%)	-15,52%	-13,30%	-12,14%	-19,55%
	Indice AP	-0,95%	-0,93%	-1,00%	-0,94%
Plafonds de TE à 5%	Moyenne	8,11%	8,11%	8,08%	8,08%
	Ecart type	21,16%	21,36%	21,90%	23,32%
	VaR à 99,5%	-35,44%	-43,54%	-48,04%	-49,67%
	Ratio d'information	2,14%	2,07%	1,78%	2,07%
	Ratio de Sharpe	28,89%	28,60%	27,78%	26,06%
	Ratio de Dowd (VaR à 99,5%)	-17,25%	-14,03%	-12,66%	-21,03%
	Indice AP	-0,26%	-0,26%	-0,29%	-0,27%
Plafonds de TE à 2%	Moyenne	8,13%	8,13%	8,12%	8,11%
	Ecart type	20,49%	20,72%	21,24%	22,70%
	VaR à 99,5%	-34,32%	-42,04%	-47,90%	-48,93%
	Ratio d'information	0,64%	0,57%	0,31%	0,55%
	Ratio de Sharpe	29,90%	29,57%	28,79%	26,90%
	Ratio de Dowd (VaR à 99,5%)	-27,49%	-14,57%	-12,77%	-21,51%
	Indice AP	-0,05%	-0,05%	-0,06%	-0,06%
Benchmark	Moyenne	8,13%	8,13%	8,13%	8,13%
	Ecart type	20,35%	20,60%	21,10%	22,58%
	VaR à 99,5%	-33,61%	-41,41%	-48,47%	-49,03%
	Ratio de Sharpe	30,15%	29,80%	29,09%	27,13%
	Ratio de Dowd (VaR à 99,5%)	-18,25%	-14,83%	-12,66%	-12,50%
Indice AP	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	